n° d'enregistrement C. N. R. S.
A. O. 6152

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

U. E. R. de LUMINY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Francis DI-GUGLIELMO

1er sujet :

SUR QUELQUES PROBLEMES DE L'APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV AVEC APPLICATIONS A LA RESOLUTION APPROCHEE DES PROBLEMES AUX LIMITES

2me sujet :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE :

THEORIE DU POTENTIEL DANS UN ESPACE DE HILBERT

Soutenue le 1972 devant la commission d'examen

M. H. MOREL Président
M. J. P. AUBIN } Examinateurs
M. A. ARAGNOL

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547004_0004

n° d'enregistrement C. N. R. S.
A. O. 6152

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

U. E. R. de LUMINY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Francis DI-GUGLIELMO

1er sujet :

SUR QUELQUES PROBLEMES DE L'APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV AVEC APPLICATIONS A LA RESOLUTION APPROCHEE DES PROBLEMES AUX LIMITES

2me sujet :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE :

THEORIE DU POTENTIEL DANS UN ESPACE DE HILBERT

Soutenue le 1972 devant la commission d'examen

M. H. MOREL Président
M. J. P. AUBIN } Examinateurs
M. A. ARAGNOL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A l'issue de ce travail, ce nous est un devoir de remercier Messieurs H. MOREL et A. ARAGNOL, Professeurs à l'U. E. R. expérimentale et pluridisciplinaire de Marseille-Luminy, à qui nous devons notre initiation à l'Analyse numérique ainsi que Monsieur J. P. AUBIN, Professeur à l'Université Paris IX, qui est à l'origine de ces recherches et dont le soutien nous a permis de surmonter bien des difficultés.

Nous remercions également le personnel du Secrétariat de Mathématiques et tout particulièrement Madame M. ROZIERE-BARRE pour le soin apporté à la présentation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

Le présent travail constitue un résumé des principaux résultats contenus dans les mémoires suivants :

I - Construction d'Approximations des espaces de Sobolev sur des réseaux en simplexes (CALCOLO 6, 1969, p 279-331).

II - Méthode des éléments finis : une famille d'approximations par les translatés de p fonctions (CALCOLO 7, 1970, p 185-234).

III - Résolution approchée des problèmes aux limites elliptiques par des schémas aux éléments finis à plusieurs fonctions arbitraires (à paraître dans CALCOLO 1971).

IV - Approximation des équations d'évolution du premier ordre en t par des schémas à un degré de liberté (à paraître).

dont l'objet est la mise au point de nouvelles familles d'approximations des espaces de Sobolev $H^m(R^n)$ généralisant celles construites dans [1], et permettant pour une précision donnée de réduire le volume des calculs nécessaires pour la résolution approchée des problèmes aux limites variationnels.

Il comporte quatre chapitres correspondant respectivement aux quatre mémoires cités ci-dessus.

Dans le chapitre I, le but recherché est la construction d'approximations sur des réseaux en simplexes telles que les matrices approchées correspondantes permettent par rapport aux schémas connus une diminution du nombre de diagonales : le gain réalisé atteint $(2m+1)^n-2(2m)^n+(2m-1)^n$ diagonales par rapport aux approximations habituelles sur les réseaux rectangulaires. D'autre part, on généralise la méthode utilisée pour l'estimation de l'erreur à des familles d'approximations plus étendues et on donne une condition suffisante pour qu'une telle estimation soit possible.

Prenant ensuite pour point de départ un travail de Friedrichs [12] employant pour éléments approximants des combinaisons linéaires de translatés de deux fonctions, on généralise dans le Chapitre II les approximations précédentes en faisant intervenir les translatés de p fonctions arbitraires et l'on montre que les p degrés de liberté ainsi introduits permettent d'influer sur certaines caractéristiques des schémas approchés construits à l'aide de ces approximations.

Dans le chapitre III, on utilise des approximations décrites dans le chapitre II pour la résolution des problèmes aux limites elliptiques de la forme $a(u, v) = (f, v)$ et l'on montre que l'on peut sans diminuer le pas h du réseau arriver par un choix convenable des p paramètres arbitraires à réduire l'erreur entre solution approchée et solution exacte. On donne ensuite des résultats numériques montrant l'effet des variations de ε sur l'écart entre solution approchée et solution exacte.

Dans le chapitre IV, on applique les approximations du chapitre II à la résolution approchée des problèmes d'évolution parabolique du 1° ordre de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)\, u = f & t \in\ ]\, 0,\ T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On leur associe des problèmes approchés explicites de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{h,k}^{\mu+1} - u_{h,k}^{\mu}}{k} + A_{\varepsilon,h,k}^{\mu}\ u_{h,k}^{\mu} = f_{h,k}^{\mu} & \mu = 1, 2, \ldots,\ \dfrac{T}{k} - 1 \\ u_{h,k}^{1} = u_{0k} \end{cases}$$

et on montre que si le paramètre arbitraire ε est choisi assez petit, les solutions approchées convergent pour $h, k \to 0$ vers la solution exacte.

D'autre part, on montre que l'intervalle de stabilité (dans lequel doit être choisi le pas en temps k pour que les erreurs éventuelles survenant au cours de la résolution du système approché ne s'amplifient pas au delà

de toute limite quand μ croît) peut être notablement agrandi par rapport aux estimations classiques pour certains choix de ε.

On donne enfin des résultats numériques montrant l'influence sur la stabilité des schémas explicites des variations du paramètre ε.

Les démonstrations des théorèmes mentionnés ne sont pas données dans le présent travail mais elles peuvent être trouvées dans les articles cités au début.

TABLE DES MATIERES

Notations

I - APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV SUR DES RESEAUX REGULIERS EN SIMPLEXES.

1 - Introduction.

2 - Approximations de $H^1(R^n)$.

3 - Approximations de $H^m(R^n)$.

4 - Quelques autres procédés de construction d'approximations de $H^m(R^n)$.

5 - Application à la résolution approchée des problèmes aux limites.

II - CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV EMPLOYANT LES TRANSLATES DE p FONCTIONS.

1 - Introduction.

2 - Propriétés des approximations de $H^m(R^n)$ par les translatés de p fonctions.

3 - Application à la résolution approchée des problèmes aux limites.

III - CONSTRUCTION DE SCHEMAS APPROCHES DEPENDANT LINEAIREMENT DE p PARAMETRES ARBITRAIRES POUR LES PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES.

1 - Introduction.

2 - Convergence des schémas approchés dépendant linéairement de p paramètres arbitraires.

3 - Cas particulier des équations à coefficients constants.

4 - Exemples d'application et résultats numériques.

IV - APPROXIMATION DES EQUATIONS D'EVOLUTION DU PREMIER ORDRE PAR DES SCHEMAS A UN DEGRE DE LIBERTE.

1 - Introduction.

2 - Construction de schémas approchés semi-discrets à un degré de liberté.

3 - Construction d'approximations discrètes à un degré de liberté.

4 - Applications : problèmes d'évolution dans des espaces de Sobolev.

5 - Etude d'un exemple et résultats numériques.

BIBLIOGRAPHIE.

N O T A T I O N S

Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, x_2, \ldots x_n$ sera désigné par $x = (x_1, \ldots, x_n)$; en particulier $h = (h_1, \ldots h_n)$ désignera un vecteur dont les composantes h_i vérifient $0 < h_i \leq 1$.

$x \geq y$ signifiera $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$.

$a = (a_1, \ldots a_n)$ et $b = (b_1, \ldots b_n)$ étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on désignera par $[a, b]$ le parallélépipède formé par les points $x = (x_1, \ldots x_n)$ tels que :
$a_i \leq x_i \leq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots n.$

Le multientier à n composantes de signe quelconque $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sera désigné par $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$.
$\alpha + \beta$ désignera le multientier de composantes $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$.
αh sera le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\alpha_1 h_1, \ldots \alpha_n h_n$.

Certains multientiers seront désignés par des notations particulières :
$(m) = (m, \ldots m)$
$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots 0)$
.....
$\varepsilon_n = (0, 0, \ldots 1)$

On écrira $\alpha \geq \beta$ si $\alpha_1 \geq \beta_1, \ldots, \alpha_n \geq \beta_n$, et $\alpha > \beta$ si $\alpha \geq \beta$ et si pour une composante α_i au moins $\alpha_i > \beta_i$.

$q = (q_1, \ldots q_n)$ étant un multientier à composantes ≥ 0, on définira sa longueur par $|q| = q_1 + \ldots + q_n$. Si p est un entier positif, on posera de plus $|q|_p$ = reste par p de $|q|$.

q et r étant des multientiers tels que $0 \leq q \leq r$ on posera :

$$C_r^q = C_{r_i}^{q_i} \ldots C_{r_n}^{q_n}$$

où les C_j^i sont les coefficients du binôme.

Si r désigne le multientier $(r_1, \ldots r_n)$ et si sa longueur est égale à q on posera :

$$\binom{q}{r} = \frac{q!}{r_1! \ldots r_n!}$$

$D_1, D_2, \ldots D_n$ désignant les opérateurs de dérivation par rapport aux variables $x_1, \ldots x_n$ on posera :

$$D^q = D_1^{q_1} \ldots D_n^{q_n}$$

$Y(t)$ désignera la fonction de Heaviside égale à 1 pour $t > 0$, nulle pour $t < 0$.

Si $q = (q_1, \ldots q_n)$ est un multientier à composantes positives on écrira :

$$\chi_q(x) = \chi_1^{*q_1}(x) \ldots \chi_n^{*q_n}(x) \qquad \text{avec } \chi_i(x) = Y(x_i) - Y(x_i - 1)$$

T désignant une distribution quelconque, on notera :

$T^\alpha = \delta_\alpha * T$ la translatée de T au point $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$
(pour une fonction $f^\alpha(x) = f(x-\alpha)$)

On définira la transformée de Fourier $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ d'une fonction $\varphi \in L^1$ par :

$$\mathcal{F}\varphi = \int e^{ikx} \varphi(x)\, dx$$

et la transformée inverse de $\tilde{\varphi}$ par :

$$\mathcal{F}^{-1}\tilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ikx} \tilde{\varphi}(k)\, dk$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désignera par $H^m(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions d'ordre au plus égal à m appartiennent à $L^2(\Omega)$. On le munira du produit scalaire :

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|q| \le m} D^q u\, D^q v\, dx$$

et de la norme $||u||_{H^m(\Omega)} = ((u, u))^{1/2}_{H^m(\Omega)}$

Enfin, on désignera par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

I - APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV SUR DES RESEAUX REGULIERS EN SIMPLEXES.

I - 1 INTRODUCTION

La méthode des éléments finis associe à un problème variationnel elliptique du type :

(I - 1) Trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait $a(u, v) = (f, v)$ avec :

(I - 2)
$$\begin{cases} V = H^k(\Omega) \\ a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq k} \int_\Omega a_{pq(x)} D^p u \, D^q v \, dx \\ (f, v) = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx \end{cases}$$

où les a_{pq} sont des fonctions appartenant à $L^\infty(\Omega)$, f est une fonction donnée de $L^2(\Omega)$ et $a(u, v)$ est supposée vérifier une condition du type :

(I - 3) $$a(v, v) \geq C \, ||v||^2 \quad \forall v \in V \quad \text{avec C constante positive}$$

des problèmes approchés définis de la manière ci-après.

On se donne un paramètre h destiné à tendre vers zéro ainsi que :

i) un espace de dimension finie V_h

ii) un isomorphisme A_h de V_h dans V_h

iii) un élément f_h de V_h

et on considère le problème approché :

(I - 4) trouver $u_h \in V_h$ tel que $A_h u_h = f_h$ dans V_h

dont la solution u_h doit converger vers la solution exacte u du problème (I - 1) au sens suivant :

(I - 5) $$\lim_{h \to 0} \| u - p_h u_h \|_V = 0$$

où p_h est une certaine application de V_h dans V.

On sait que ce programme peut être réalisé par la méthode de Galerkin qui consiste à se donner une base $(\omega_n)_n$ de l'espace de Hilbert V et à définir :

(I - 6)
$$\begin{cases} V_h = R^n & (\text{avec } h = \frac{1}{n}) \\ u_h = (u_h^i)_{i=1,\ldots,n} \\ p_h u_h = \sum_{i=1}^{n} u_h^i \ \omega_i \end{cases}$$

On associe alors à l'équation variationnelle :

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V$$

l'équation approchée :

(I - 7) $$a(p_h u_h, p_h v_h) = (f, p_h v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

ou encore :

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_h^i v_h^j \ a(\omega_i, \omega_j) = \sum_{j=1}^{n} v_h^j \ (f, \omega_j)$$

qui est en fait une équation matricielle de la forme (I - 4) avec :

$$(A_h)^{ij} = a(\omega_j, \omega_i) \qquad i, j = 1, \ldots n$$

$$f_h^i = (f, \omega_i) \qquad i = 1, \ldots n$$

On sait alors (cf [2]) que la solution de (I - 7) converge au sens (I - 5) vers la solution exacte u de (I - 1).

Cependant, du point de vue de la résolution numérique des systèmes linéaires (I - 4), les matrices $a(\omega_j, \omega_i)$ présentent le désavantage de ne pas posséder à priori d'éléments nuls, ce qui nécessite (pour leur traitement sur ordinateur) l'utilisation d'un nombre de mémoires élevé pour le stockage de leurs éléments et augmente le nombre des opérations arithmétiques.

C'est pourquoi on a été amené à rechercher d'autres types d'approximations conduisant à des matrices ayant de nombreux éléments nuls.

Il a été montré (cf. [1], [2]) que l'on peut remplir le programme ci-dessus en partant des fonctions :

$$\sigma^{\alpha}_{(m),h} = \frac{1}{h}\ \sigma_{(m)}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) = \frac{1}{h_1 \cdots h_n}\ \sigma_{(m)}\left(\frac{x_1}{h_1} - \alpha_1, \ldots, \frac{x_n}{h_n} - \alpha_n\right)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in Z^n$$

obtenus par homothétie et translation à partir de la fonction :

$$\sigma_{(m)}(x) = \chi_{(m+1)}(x) = \chi^{*(m+1)}(x_1) \ldots \chi^{*(m+1)}(x_n)$$

(avec $\chi(t) = Y(t) - Y(t-1)$ et $Y(t)$ fonction de Heaviside.)

et posant :

(I - 8)
$$p_h u_h = \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^{\alpha}\ \sigma^{\alpha}_{(m),h}$$

où $(u_h^{\alpha})_{\alpha}$ est une suite de carré sommable nulle en dehors de l'ensemble d'indices :

$$R_{(m),h}(\Omega) = \left\{ \alpha \in Z^n \mid \text{Support } \sigma^{\alpha}_{(m),h} \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

On peut alors montrer que si la solution u de (I - 1) appartient en fait à $H^{q+1}(\Omega)$ avec $q \geq m$, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\| u - p_h u_h \|_{H^m(\Omega)} \leq C\, h^{q+1-m}$$

avec C constante indépendante de h.

La fonction $\sigma_{(m)}$ a pour support le cube $[0,\ m+1]^n$ et il y a pour α donné un nombre fini, égal à $(2m+1)^n$, de fonctions $\sigma_{(m),h}$ telles que $a(\sigma^{\beta}_{(m),h'},\ \sigma^{\alpha}_{(m),h}) \neq 0$.

La matrice $A_h^{\alpha\beta} = a(\sigma^{\beta}_{(m),h}, \sigma^{\alpha}_{(m),h})$ possède donc un nombre fini de diagonales non nulles, elle est dite "à $(2m+1)^n$ niveaux".

Or on connaissait déjà (cf [8], [13]), dans le cas des espaces $H^1(R^2)$ au moins, des approximations pour lesquelles ce nombre de niveaux est à priori plus petit ; ce sont les approximations sur les réseaux en hexagones définies par :

(I - 9) $$p_h^1 u_h = \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^{\alpha} \theta_h^{\alpha} \qquad \text{avec} \quad \theta_h^{\alpha} = \frac{1}{h} \theta\left(\frac{x}{h} - \alpha\right)$$

où θ est la fonction linéaire par morceaux ayant pour support l'hexagone H des sommets $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm(e_1 + e_2)$ et définie par :

(I - 10) $$\theta = (1 - x_1) Y(1 - x_1) Y(x_2) Y(x_1 - x_2) + (1 - x_2) Y(1 - x_2) Y(x_1) Y(x_2 - x_1)$$

$$+ (1 + x_1) Y(1 + x_1) Y(-x_2) Y(-x_1 + x_2) + (1 + x_2) Y(1+x_2) Y(x_1) Y(-x_2 + x_1)$$

$$+ (1 + x_1 - x_2) Y(1+x_1-x_2) Y(-x_1) Y(x_2) + (1-x_1+x_2) Y(1-x_1+x_2) Y(x_1) Y(-x_2)$$

On vérifie en effet que les fonctions θ_h^{β} telles que leur support recoupe celui de θ_h^{α} sont au nombre de 7, à savoir celles pour lesquelles $\beta = \alpha$, $\alpha \pm \epsilon_1$, $\alpha \pm \epsilon_2$, $\alpha \pm (\epsilon_1 + \epsilon_2)$. On déduit de là que la matrice d'éléments $a(\theta_h^{\beta}, \theta_h^{\alpha})$ possède a priori 7 niveaux au lieu de 9 pour la matrice $a(\sigma_h^{\beta}, \sigma_h^{\alpha})$ dans le cas $m = 1$.

D'autre part, quelle que soit la fonction $u \in H^1(R^2)$, il existe une suite de vecteurs $u_h = (u_h^{\alpha})_{\alpha}$ tels que :

(I -11) $$\lim_{h \to 0} \| u - p_h u_h \|_{H^1(R^2)} = 0$$

On va voir que ces approximations de $H^1(R^2)$ peuvent se généraliser à $H^1(R^n)$ et que la matrice correspondante $a(\theta^{\beta}_{(m),h}, \theta^{\alpha}_{(m),h})$ admet alors $2(2m)^n - (2m-1)^n$ niveaux au lieu de $(2m+1)^n$ pour $a(\sigma^{\beta}_{(m),h}, \sigma^{\alpha}_{(m),h})$.

Il nous faut maintenant signaler que de nombreux travaux parmi lesquels nous citerons [6], [7], [9], [13], [15], [16], [20], ont porté sur l'approximation des espaces de Sobolev ou des espaces de fonctions continues à l'aide de polynômes ou de fonctions polynômiales par morceaux définis sur des réseaux en simplexes.

triangles $S_{12} = (0, e_1, e_1+e_2)$ et $S_{21} = (0, e_2, e_1+e_2)$ obtenus par partition du carré unité construit sur les vecteurs de base e_1, e_2. On est donc conduit, dans le cas de R^n, à introduire la partition $Q = \bigcup_{\sigma \in G_m} S_\sigma$ de l'hypercube Q construit sur les vecteurs de base $e_1, \ldots e_n$ en les simplexes :

(I-12) $$S_\sigma = \left\{ 0 ; e_{\sigma(1)} ; e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} ; \ldots ; e_{\sigma(1)} + \ldots + e_{\sigma(n)} \right\}$$

où σ est une permutation quelconque des entiers 1, 2, ... n.

Comme généralisation des hexagones ci-dessus, on prendra le complexe K formé par la réunion des simplexes S_σ^α ayant un sommet commun en x = 0, c'est-à-dire :

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\sigma \in G_m} S_\sigma^{-\varepsilon_{\sigma(1)} \cdots -\varepsilon_{\sigma(j)}}$$

Si l'on note :

(I-13) $$\zeta_\sigma(x) = Y(1-x_{\sigma(1)})\, Y(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)}) \ldots\ldots\, Y(x_{\sigma(n-1)}-x_{\sigma(n)})\, Y(x_{\sigma(n)})$$

la fonction caractéristique du complexe S_σ (avec Y fonction de Heaviside), on peut construire une fonction θ variant linéairement sur chacun des simplexes S_σ^α, prenant la valeur 1 à l'origine et nulle en dehors du complexe K en posant :

(I-14) $$\theta(x) = \sum_{\sigma \in G_n} \sum_{j=0}^{n} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(j+1)} + 1)\, \zeta_\sigma^{-\varepsilon_{\sigma(1)} \cdots -\varepsilon_{\sigma(j)}}$$

(où on a fait la convention $x_{\sigma(0)} = x_{\sigma(n+1)} = 0 \qquad \forall\, \sigma \in G_n$)

Cette fonction vérifie la :

PROPOSITION I - 1

i) θ est une fonction continue linéaire par simplexe dont le suppor est défini par :

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\sigma \in G_n} S_{\sigma}^{-\epsilon_{\sigma(1)} \cdots -\epsilon_{\sigma(j)}}$$ et qui vérifie $0 \leq \theta(x) \leq$

ii) elle possède la propriété de partition de l'unité c'est-à-dire :

(I- 15) $$\sum_{\alpha \in Z^n} \theta\,(x - \alpha) = 1$$

iii) ses dérivées premières au sens des distributions sont données p

(I-16) $$D_k \theta = \bar{\nabla}_k \pi_k \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

où π_k est la fonction à support compact définie par :

(I-17) $$\pi_k = \sum_{\sigma \in G_n} \zeta_{\sigma}^{-\epsilon_{\sigma(1)} \cdots -\epsilon_{\sigma(\sigma^{-1}(k))}} \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

et $\bar{\nabla}_k$ est l'opérateur de différences finies défini par :

(I-18) $$\bar{\nabla}_k \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x - e_k) \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

iv) les fonctions π_k possèdent également la propriété de partition de l'unité :

(I-19) $$\sum_{\alpha \in Z^n} \pi_k\,(x - \alpha) = 1 \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

Désignant par $h = (h_1, \ldots h_n)$ un vecteur de R^n dont les composantes h_i vérifient $0 < h_i \leq 1$ et par $u_h = (u_h^{\alpha})_{\alpha}$ une suite de $l^2(Z^n)$, c'est-à-dire telle que

$\sum_{\alpha \in Z^n} |u_h^{\alpha}|^2 < \infty$, nous pouvons donc poser comme en (I-9) :

(I-20) $$p_h^{(1)} u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \theta_h^\alpha$$

avec : $\theta_h^\alpha = \frac{1}{h} \theta (\frac{x}{h} - \alpha)$, $\sqrt{h} = (h_1 \ \dots \ h_n)^{1/2}$, ce qui définit une application p de $l^2(Z^n)$ dans $H^m(R^n)$.

Nous déduisons de la Proposition I-1 que les opérateurs p_h^1 commutent avec les opérateurs de dérivation $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ suivant la formule :

(I-21) $$D_k p_h^{(1)} u_h = p_{h_k}^{(0)} \overline{\nabla}_{h_k} u_h : \quad k = 1, 2, \dots n \qquad \forall u_h \in l^2(Z^n)$$

où l'on a posé :

(I-22) $$p_{h_k}^{(0)} u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \pi_{k,h}^\alpha \qquad k = 1, 2, \dots n$$

$$\overline{\nabla}_{h_k} u_h = \frac{u_h^\alpha - u_h^{\alpha - \varepsilon_k}}{h_k}$$

Nous définissons d'autre part une application r_h de $H^1(R^n)$ dans $l^2(Z^n)$ par :

(I-23) $$(r_h u)_\alpha = \sqrt{h} \int \rho_h^\alpha u \, dx \qquad u \in H^1(R^n) \qquad \alpha \in Z^n$$

où nous avons posé : $\rho_h^\alpha = \frac{1}{h} \rho (\frac{x}{h} - \alpha)$ avec ρ fonction de $L^1 \cap L^\infty$ à support compact de masse totale égale à 1.

A chaque fonction $u \in H^1$ est alors associée la famille des fonctions

$p_h^1 r_h u \in H^1$ et l'on a pour les opérateurs $p_h^1 r_h \in \mathcal{L}(H^1, H^1)$ les propriétés suivantes :

THEOREME I-1

Les opérateurs $p_h^1 r_h$ forment une famille uniformément bornée et convergente vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^1, H^1)$ c'est-à-dire que, quelle que soit $u \in H^1(R^n)$, les relations suivantes sont vérifiée

(I-24)
$$\begin{cases} \text{i)} \quad \| p_h^1 r_h u \|_{H^1} \leq C \| u \|_{H^1} \\ \text{ii)} \quad \lim_{h \to 0} \| u - p_h^1 r_h u \|_{H^1} = 0 \end{cases}$$

I - 3 APPROXIMATIONS DE $H^m(R^n)$

Nous les obtiendrons en régularisant les approximations de $H^1(R^n)$ construites précédemment par convolution répétée avec la fonction χ, fonction caractéristique du cube unité $Q = [0,1]^n$.

Le calcul direct des produits de convolution étant malaisé, il est préférable d'utiliser la transformation de Fourier qui ramène ces produits à des produits algébriques.

Nous utilisons les notations suivantes :

$$\tilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi = \int e^{ikx}\,\varphi(x)\,dx \qquad (\text{où } k = (k_1, \ldots k_n),\ kx = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n)$$

désignera la transformée de Fourier de φ et :

$$\varphi = \mathcal{F}^{-1}\tilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ikx}\,\tilde{\varphi}(k)\,dk$$

désignera la transformée de Fourier inverse .

Un calcul direct montre d'abord que l'on a pour la fonction θ définie en (I-14) :

$$\mathcal{F}\theta = \frac{e^{ik_1}-1}{ik_1} \cdots \frac{e^{ik_n}-1}{ik_n} \quad \frac{1-e^{-i(k_1+\ldots+k_n)}}{i(k_1+\ldots+k_n)} \tag{I-25}$$

On reconnait tout de suite que, le produit $\frac{e^{ik_1}-1}{ik_1} \cdots\cdots \frac{e^{ik_n}-1}{ik_n}$ n'étant autre que la transformée de Fourier de χ, la fonction θ peut se définir encore par le produit de convolution :

$$\theta = \chi * T \tag{I-26}$$

où T désigne la mesure positive définie par :

$$T(\varphi) = \int_{-1}^{0} \varphi(t, \ldots t)\,dt \tag{I-27}$$

ayant pour support le segment S d'extrémités $-e_1 - \ldots - e_n$ et 0.

On définira donc la fonction $\theta_{(m)}$ régularisée de θ par la formule :

(I-28) $$\theta_{(m)} = \chi^{*(m)} * T = \chi^{*(m-1)} * \theta$$

Désignant par Q_m le cube $[0, m]^n$, support de $\chi^{*(m)}$, on voit immédiatement que le support de $\theta_{(m)}$ est égal à la somme directe des domaines $Q_{(m)}$ et S c'est-à-dire :

(I-29) $$\text{Support } \theta_{(m)} = Q_{(m)} + S = C(Q_{(m)} \cup Q_{(m)}^{-(1)})$$

où $C(Q_{(m)} \cup Q_{(m)}^{-(1)})$ désigne l'enveloppe convexe du cube $Q_{(m)}$ et de son translaté $Q_{(m)}^{-(1)}$ par le vecteur $(-1, \ldots, -1)$.

Cette fonction $\theta_{(m)}$ possède d'autre part les propriétés suivantes :

PROPOSITION I-2 i)

$\theta_{(m)}$ est une fonction continue polynômiale par simplexe de degré $n(m-1)+1$ dont le support est égal à l'enveloppe convexe $C(Q_{(m)} \cup Q_{(m)}^{-(1)})$ où $Q_{(m)} = [0, m]^n$ et qui vérifie :

$$0 \leq \theta_{(m)}(x) \leq 1.$$

ii) elle possède la propriété de partition de l'unité :

(I-30) $$\sum_{\alpha} \theta_{(m)}(x-\alpha) = 1$$

iii) ses dérivées d'ordre $q < (m)$ sont données par :

(I-31) $$D^q \theta_{(m)} = \overline{\nabla}_q \theta_{(m)-q}$$

où $\theta_{(m)-q}$ est la fonction définie par :

(I-32) $$\theta_{(m)-q} = \chi_{(m)-q} * T \qquad q < (m)$$

et où $\overline{\nabla}^q$ désigne l'opérateur de différences finies agissant

sur les fonctions suivant :

(I-33) $$\bar{\nabla}^q \varphi(x) = \sum_{j \leq q} (-1)^{|q-j|} C_q^j \varphi(x-j)$$

iv) les fonctions $\theta_{(m)-q}$ vérifient pour $q < (m)$ la propriété de partition de l'unité :

(I-34) $$\sum_\alpha \theta_{(m)-q}(x-\alpha) = 1.$$

Désignant par $h = (h_1, \ldots, h_n)$ le pas du réseau et par u_h un élément de $l^2(Z^n)$ c'est-à-dire une suite $(u_h^\alpha)_{\alpha \in Z^n}$ telle que $\sum_\alpha |u_h^\alpha|^2 < \infty$, nous définissons une application $p_h^{(m)}$ (dite opérateur de prolongement) de $l^2(Z^n)$ dans $H^m(R^n)$ par :

(I-35) $$p_h^{(m)} u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \theta_{(m),h}^\alpha \quad \text{avec} \quad \theta_{(m),h}^\alpha = \frac{1}{h} \theta_{(m)} \left(\frac{x}{h} - \alpha \right)$$

et une application r_h (dite opérateur de restriction) de $H^m(R^n)$ dans $l^2(Z^n)$ par

(I-36) $$r_h u = \left(\sqrt{h} \int \rho_h^\alpha u \, dx \right)_{\alpha \in Z^n} \quad \text{avec} \quad \rho_h^\alpha = \frac{1}{h} \rho \left(\frac{x}{h} - \alpha \right)$$

où ρ est une fonction de $L^1 \cap L^\infty$ à support compact de masse totale unité.

Tenant compte du lemme suivant démontré dans [4] :

LEMME

Quelle que soit la fonction $\theta \in L^1 \cap L^\infty$ positive et à support compact, et quel que soit le vecteur $\alpha \in R^n$ on a:

$$\int \theta(x) \, \theta(x-\alpha) \, dx = 0$$

si et seulement si :

$$\text{Support } \theta(x) \cap \text{Support } \theta(x-\alpha) = \emptyset$$

on déduit de la connaissance du support de $\theta_{(m)}$ le nombre de niveaux des approximations de H^m.

PROPOSITION I-3

Le nombre de niveaux des approximations de H^m (c'est-à-dire le nombre de multientiers α tels que

Support $\theta_{(m)}(x-\alpha) \cap$ Support $\theta_{(m)}(x) \neq \emptyset$) est donné par :

(I-37) $$\mathcal{N} = 2(2m)^n - (2m-1)^n$$

Les applications $p_h^{(m)}$ et r_h définies par (I-35), (I-36) vérifient d'autre part les propriétés suivantes :

THEOREME 1-2 :

i) Pour tout multientier $q < (m)$ on a :

(I-38) $$D^q p_h^{(m)} u_h = p_h^{(m)-q} \overline{\nabla}_h^q u_h$$

où on a posé :

(I-39) $$p_h^{(m)-q} u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \theta^\alpha_{(m)-q,h}$$

avec $\theta^\alpha_{(m)-q,h} = \frac{1}{h} \theta_{(m)-q}(\frac{x}{h} - \alpha)$

(I-40) $$\overline{\nabla}_h^q u_h = (\frac{1}{h^q} \sum_{j \leq q} (-1)^{|j|} C_q^j u_h^{\alpha-j})_\alpha \in Z^n$$

ii) il existe des constantes positives M, M' indépendantes de h telles que :

(I-41) $$M' |u_h|_{m,h} \leq \| p_h^{(m)} u_h \|_{H^m} \leq M |u_h|_{m,h} \quad \forall u_h \in l^2(Z^n)$$

iii) il existe C constante positive indépendante de h telle que :

(I-42) $$|r_h u|_{m,h} \leq C \|u\|_{H^m} \quad \forall u \in H^m(R^n)$$

où l'on a posé :

I-43)
$$|u_h|_{0,h} = \left(\sum_{\alpha} |u_h^{\alpha}|^2 \right)^{1/2}$$

$$|u_h|_{m,h} = \left(\sum_{|q| \leq m} |\overline{\nabla}_h^q u_h|_{0,h}^2 \right)^{1/2}$$

Il résulte d'ailleurs de ces propriétés que :

THEOREME I-3 :

i) Les opérateurs $p_h^{(m)} r_h$ sont uniformément bornés dans $\mathcal{L}(H^m, H^m)$ c'est-à-dire :

I-44)
$$\| p_h^{(m)} r_h u \|_{H^m} \leq C \| u \|_{H^m} \quad \forall u \in H^m(R^n)$$

avec C constante > 0 indépendante de h.

ii) ils convergent simplement vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^m, H^m)$ c'est-à-dire :

I-45)
$$\lim_{h \to 0} \| u - p_h^{(m)} r_h u \|_{H^m} = 0 \qquad \forall u \in H^m(R^n)$$

D'autre part, on sait (cf. [3], [4]), que l'on caractérise les approximations d'un espace de Banach V par les éléments d'un sous-espace P_h relativement à à un sous-espace U muni d'une topologie plus fine et contenant P_h grâce aux paramètres suivants :

- la fonction de stabilité :

I-46)
$$s_V^U(P_h) = \sup_{v \in P_h} \frac{\|v\|_U}{\|v\|_V}$$

- la fonction d'erreur :

I-47)
$$e_V^U(P_h) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in P_h} \frac{\|u-v\|_V}{\|u\|_U}$$

et qu'un rôle important est joué par celles de ces approximations (dites approximations "quasi optimales") qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{(I-48)} \qquad \sup_h \; e_V^U(P_h)\, S_V^U(P_h) < \infty$$

Il est en effet possible dans ce cas (cf [3]) d'obtenir une estimation asymptotique de la fonction d'erreur sous la forme :

$$\text{(I-49)} \qquad e_V^U(P_h) \le M\, e_V^U(n(h)-1)$$

où n(h) = dimension de P_h et où $e_V^U(n)$ désigne la n-largeur de l'injection de U dans V c'est-à-dire :

$$\text{(I-50)} \qquad e_V^U(n) = \inf_{\dim(P)=n} e_V^U(P)$$

Nous allons donc dans le cas des approximations définies par (I-35) et (I-36) évaluer les quantités (I-46) et (I-47) et montrer que celles-ci satisfont bien la condition (I-48).

Si nous choisissons dans les formules ci-dessus $V=H^k(R^n)$ et $U = H^s(R^n)$ avec $k \le s \le m$ nous avons la

PROPOSITION I-4

La fonction de stabilité

$$S_s^k(p_h^{(m)}) = \sup_{u_h} \frac{\| p_h^{(m)} u_h \|_{H^s}}{\| p_h^{(m)} u_h \|_{H^k}}$$

vérifie pour $k \le s \le m$ la majoration :

$$\text{(I-51)} \qquad S_s^k(p_h^{(m)}) \le A \frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^s}$$

où A est une constante indépendante de h et où l'on a posé :

$$\bar{h} = \max(h_1, \ldots h_n), \quad \underline{h} = \min(h_1, \ldots h_n)$$

On a vu (cf Théorème 1-3) que pour tout $u \in H^m$ les fonctions $p_h^{(m)} r_h u$ convergent vers u dans H^m pour $h \to 0$. Il nous faut maintenant, en vue d'aboutir à une estimation de la fonction d'erreur, étudier la vitesse de convergence de $p_h^{(m)} r_h u$ vers u lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire préciser l'ordre en h de l'erreur $p_h^{(m)} r_h u - u$. Nous avons à ce sujet le

THEOREME I-4

Supposons que les moments $m_q(\rho) = \int \rho(t)\, t^q\, dt$ de la fonction ρ satisfont aux relations suivantes :

(I-52)
$$\sum_{0<l\le j} C_j^l\, m_{j-l}\, \theta_{(m),l} = 0 \qquad \forall j \quad |j| \le m.$$

où l'on a posé :

(I-53)
$$\theta_{(m),l} = \left[(i D)^l\, \mathcal{F}\theta_{(m)}\right]_{k=0}$$

avec $\mathcal{F}\theta_{(m)} = \int e^{ikx}\, \theta_{(m)}(x)\, dx = \left(\frac{e^{ik_1}-1}{ik_1}\right)^m \cdots \left(\frac{e^{ik_n}-1}{ik_n}\right)^m$

$$\times \frac{1-e^{-i(k_1+\ldots+k_n)}}{i(k_1+\ldots+k_n)}$$

alors quelle que soit $u \in H^{m+1}(R^n)$, on a pour $k \le m$ et $k \le s \le m+1$ l'estimation suivante :

(I-54)
$$\| p_h^{(m)}\, r_h\, u - u \|_{H^k} \le C\, \bar{h}^{\,s+1-k} \| u \|_{H^{s+1}}$$

De plus, la fonction d'erreur des approximations (I-35) et (I-36) définie par :

$$e_s^k(p_h^{(m)}) = \sup_{u \in H^s} \inf_{u_h \in l^2(Z^n)} \frac{\| p_h^{(m)} u_h - u \|_{H^k}}{\| u \|_{H^s}}$$

vérifie pour $k \le m$, $k \le s \le m+1$ la majoration :

(I-55)
$$e_s^k(p_h^{(m)}) \le C\, \bar{h}^{\,s-k}$$

avec C constante positive indépendante de h.

Des inégalités (I-51) et (I-55) on déduit :

COROLLAIRE I-4 | On suppose qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h telle que $\overline{h} < \sigma \underline{h}$, alors le produit de la fonction de stabilité et de la fonction d'erreur des approximations (I-35) (I-36) de $H^m(R^n)$ reste borné quel que soit $h \leq (1)$:

(I-56)
$$\sup_h \; S_s^k(p_h^{(m)}) \; e_s^k(p_h^{(m)}) \leq M < +\infty \qquad 0 \leq k \leq s \leq m$$

I - 4 AUTRES PROCEDES DE CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS DE $H^m(R^n)$.

L'énoncé (et la démonstration) du théorème précédent montre que la fonction $\theta_{(m)}$ intervient dans l'obtention de l'estimation d'erreur (I-54) non pas par sa forme explicite, mais seulement par les valeurs de sa transformée de Fourier et des dérivées de celles-ci à l'origine et en les points $2\alpha\pi \quad \alpha \in Z^n$. Il est donc naturel de chercher à étendre cette propriété de convergence de l'erreur à d'autres familles d'approximations (utilisant également des combinaisons linéaires de translatés d'une fonction θ donnée) en faisant certaines hypothèses sur les valeurs de la transformée de Fourier $\mathcal{F}\theta$ en les points $2\alpha\pi$. Nous avons à ce sujet le

THEOREME I-5

Soit θ une fonction de L^2 telle que $\sum_\alpha \left| \int \theta(t)\theta(t-\alpha)dt \right| < \infty$

Supposons que sa transformée de Fourier $\tilde{\theta} = \mathcal{F}\theta$ est dérivable jusqu'à l'ordre m et vérifie :

(I-57)
$$\begin{cases} \tilde{\theta}(0) = 1 \\ [D^j \tilde{\theta}(k)]_{k=2\alpha\pi} = 0 \qquad \forall \alpha \in Z^n \quad \alpha \neq 0 \qquad \forall j \quad |j| \leq m \end{cases}$$

alors, si l'on pose :

(I-58)
$$\begin{cases} p_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^\alpha \, \theta_h^\alpha \qquad \text{avec } \theta_h^\alpha = \frac{1}{h}\,\theta\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \\ r_h u = \left(\sqrt{h} \int \rho_h^\alpha u \, dx\right)_{\alpha \in Z^n} \qquad \text{avec } \rho_h^\alpha = \frac{1}{h}\,\rho\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \end{cases}$$

(où ρ désigne une fonction de $L^1 \cap L^\infty$ à support compact de masse totale 1) on a les majorations :

(I-59)
$$\begin{cases} \text{i)} \quad \|p_h u_h\|_{L^2} \leq M \, |u_h|_{0,h} \qquad \forall u_h \in l^2(Z^n) \\ \text{ii)} \quad \|u - p_h r_h u\|_{L^2} \leq C \, h^{m+1} \, \|u\|_{H^{m+1}} \qquad \forall u \in H^{m+1}(R^n) \end{cases}$$

où M et C désignent des constantes indépendantes de h.

Faute de pouvoir utiliser pour $p_h u_h$ une relation de commutation du type (I-38), il ne nous est pas possible d'obtenir une estimation de l'erreur dans $H^m(R^n)$; on peut cependant obtenir une telle estimation si l'on considère des fonctions θ de forme particulière, on a ainsi le

COROLLAIRE I-5 Soit μ une mesure positive à support compact de masse totale unité vérifiant :

(I-60) $$< \mu, e^{i2\pi\alpha x} > \; = 0 \qquad \forall \alpha \in Z^n \quad \alpha \neq 0$$

alors les fonctions

(I-61) $$\theta_{(m)-q} = \chi_{(m)-q} * \mu \qquad q < (m)$$

(où χ désigne la fonction caractéristique du cube $[0, 1]^n$) sont positives, à support compact, vérifient la propriété de partition de l'unité :

(I-62) $$\sum_{\alpha \in Z^n} \theta^{\alpha}_{(m)-q} = 1 \quad ,$$

et les formules

(I-63) $$\begin{cases} p_h^{(m)} u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^{\alpha} \; \theta^{\alpha}_{(m),h} \qquad \theta^{\alpha}_{(m),h} = \frac{1}{h}\theta_{(m)}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \\ r_h u = \left(\sqrt{h} \int \rho_h^{\alpha} u \, dx\right)_{\alpha} \end{cases}$$

définissent une famille d'approximations de H^m vérifiant la propriété de commutation :

(I-64) $$D^q p_h^{(m)} u_h = p_h^{(m)-q} \; \overline{\nabla}_h^q \; u_h \qquad \forall q \qquad |q| \leq m$$

avec

$$p_h^{(m)-q} u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^{\alpha} \; \theta^{\alpha}_{(m)-q,h}$$

Ces approximations vérifient pour $k \leq m$, $k \leq s \leq m+1$ l'estimation d'erreur :

(I-65)
$$\|u - p_h^{(m)} r_h u\|_{H^k} \leq C \bar{h}^{s+1-k} \|u\|_{H^{s+1}}$$

$$\forall u \in H^{m+1}(R^n)$$

Etant donné qu'il laisse libre le choix de la mesure μ, le résultat ci-dessus permet de construire d'autres familles d'approximations analogues à celles obtenues à partir des réseaux hexagonaux de R^2. En particulier pour $\mu = \chi$, fonction caractéristique de $[0, 1]^n$, on retrouve les approximations (I-9). D'autre part, si l'on se borne à considérer des fonctions $\theta_{(m)}$ symétriques en $x_1, \ldots x_n$ (obtenues à partir de mesures μ symétriques en ces variables) et si l'on veut que le support de $\theta_{(m)}$ soit égal à une réunion de simplexes S_σ^α, il sera nécessaire que le support de μ contienne le segment d'extrémités $[-e_1, \ldots -e_n, 0]$. Ceci signifie que les fonctions $\theta_{(m)}$ construites en (I-28) réalisent dans la classe définie par (I-63) un minimum du point de vue de l'étendue des supports.

Signalons enfin qu'il a été montré par G. Fix et G. Strang (cf [10], [11], [21]) dans une étude d'ensemble des méthodes aux éléments finis que la condition (I-57) est non seulement suffisante, mais encore nécessaire pour que l'on ait la propriété de convergence (I-59).

I - 5 APPLICATIONS A LA RESOLUTION APPROCHEE DES PROBLEMES AUX LIMITES.

Nous examinons d'abord l'extension des résultats précédents aux espaces $H^m(\Omega)$, Ω ouvert borné de R^n, puis nous utilisons les approximations ainsi construites pour la résolution approchée de problèmes aux limites dans ces espaces.

Soit Ω un ouvert de R^n possédant la propriété de régularité suivante :

(I-66) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un opérateur linéaire continu } \pi \text{ de } H^m(\Omega) \text{ dans } H^m(R^n) \\ \text{tel que si } \rho \text{ désigne l'opérateur de restriction à } \Omega \text{ on ait } \rho\pi = 1. \end{array} \right.$

Nous posons :

(I-67) $$R^{(m)}_{h,\Omega} = \left\{ \alpha \in Z^n \ / \ \text{Support } \theta^{\alpha}_{(m),h} \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

et nous considérons l'espace $l^2(R^{(m)}_{h,\Omega})$ des suites scalaires finies $u_h = (u_h^{\alpha})_{\alpha \in R^{(m)}_{h,\Omega}}$ muni du produit scalaire :

$$(u_h, v_h)_h = \sum_{\alpha \in R^{(m)}_{h,\Omega}} u_h^{\alpha} \, v_h^{\alpha}$$

Nous pouvons alors définir des approximations de $H^m(\Omega)$ par :

(I-68) $\left\{ \begin{array}{l} p^{(m)}_{h,\Omega} \ u_h = \rho \, p^{(m)}_h u_h \\ \\ r_{h,\Omega} \, u = r_h(\pi \, u) \end{array} \right.$

Nous supposons r_h défini à l'aide d'une fonction ρ vérifiant les hypothèses (I-52), alors, nous savons que les opérateurs $p^{(m)}_h \ r_h$ sont équicontinus et convergent vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^m(R^n), H^m(R^n))$. Les applications ρ et π étant continues et vérifiant $\rho\pi = 1$, il en est de même pour

$$\rho \, p^{(m)}_h \, r_h \, \pi = p^{(m)}_{h,\Omega} \ r_{h,\Omega}$$

Nous avons donc :

THEOREME I-6 :

Les opérateurs $p^{(m)}_{h,\Omega}$ $r_{h,\Omega}$ définis par (I-68) forment une famille équicontinue et convergeant vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^m(\Omega),\ H^m(\Omega))$, c'est-à-dire qu'on a pour tout $u \in H^m(\Omega)$:

(I-69)

$$\text{i)} \quad \| p^{(m)}_{h,\Omega} \ r_{h,\Omega} \ u \|_{H^m(\Omega)} \leq C \ \| u \|_{H^m(\Omega)}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{h \to 0} \ \| p^{(m)}_{h,\Omega} \ r_{h,\Omega} \ u - u \|_{H^m(\Omega)} = 0$$

Si de plus la fonction ρ vérifie les formules (I-52) jusqu'à l'ordre m et si l'opérateur π applique également $H^{m+1}(\Omega)$ dans $H^{m+1}(R^n)$, ils satisfont à l'estimation d'rrreur :

(I-70)

$$\| p^{(m)}_{h,\Omega} \ r_{h,\Omega} \ u - u \|_{H^k(\Omega)} \leq C \, \bar{h}^{m+1-k} \| u \|_{H^{m+1}(\Omega)}$$

où $u \in H^{m+1}(\Omega)$ et $k \leq m+1$.

Revenons maintenant au problème variationnel défini par les formules (I-1) et (I-2) de l'introduction. Soit k entier $\geq m$ et soient A^k_h la matrice et f^k_h le vecteur définis par :

(I-71)

$$(A^k_h \ u_h, \ v_h)_h = \sum_{|p|,\,|q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}(x) \ D^p \ p^{(k)}_{h,\Omega} \ u_h \ D^q p^{(k)}_{h,\Omega} \ v_h \ dx$$

$$u_h, \ v_h \in l^2(R^{(k)}_{h,\Omega})$$

$$(f^k_h, \ v_h)_h = \int_\Omega f(x) \ p^{(k)}_{h,\Omega} \ v_h \ dx \qquad v_h \in l^2(R^{(k)}_{h,\Omega})$$

Nous avons le :

THEOREME I-7

L'équation approchée :

(I-72)

$$A^k_h \ u_h = f^k_h$$

(dans laquelle la matrice A_h^k possède $2(2k)^n-(2k-1)^n$ niveaux) admet dans $V_h = l^2(R^{(k)}_{h,\Omega})$ une solution unique u_h qui converge pour $h \to 0$ vers la solution exacte u du problème (I-1).

Si d'autre part la solution exacte u appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ avec $k \geq m$, l'erreur $u-p_h^{(k)} u_h$ vérifie :

I-73)

$$\| u-p_h^{(k)} u_h \|_{H^m(\Omega)} \leq C \, h^{k+1-m}$$

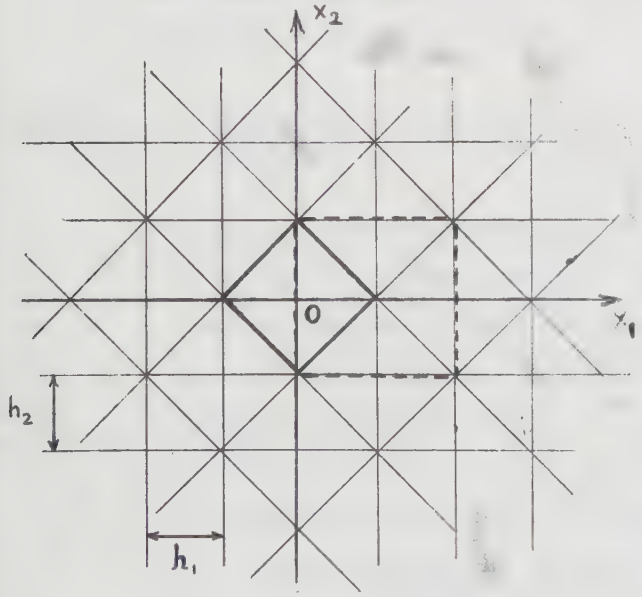
avec C constante indépendante de h.

II - CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV EMPLOYANT LES TRANSLATES DE p FONCTIONS

II - 1 INTRODUCTION

Les approximations du chapitre précédent ont été contruites à l'aide de combinaisons linéaires de translatés d'une même fonction θ ; ce procédé est susceptible de généralisations : on connait en effet pour $H^1(R^2)$ une famille d'approximations due à Friedrichs [12] qui emploie des combinaisons linéaires de 2 fonctions linéaires par morceaux et qui donne une précision asymptotique du même ordre que celle fournie par les approximations (I-8) ou (I-9).

Ces approximations sont définies de la manière suivante : on considère un réseau rectangulaire de maille $h = (h_1, h_2)$ défini par les points $\alpha h = (\alpha_1 h_1, \alpha_2 h_2)$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z^2$ et on trace les deux diagonales des rectangles $[\alpha h, (\alpha+(1))h]$, $\alpha \in Z^2$; on détermine ainsi une nouvelle partition de R^2 en losanges à côtés parallèles à ces diagonales.



On peut alors considérer le recouvrement de R^2 constitué par les losanges $\mathcal{L}_h^\alpha$ de centre αh, avec $\alpha_1+\alpha_2$ pair, et de sommets $\alpha h \pm \epsilon_1 h_1$, $\alpha h \pm \epsilon_2 h_2$ d'une part, et les rectangles $\mathcal{R}_h^\alpha$ de centre αh, avec $\alpha_1+\alpha_2$ impair, et de sommets $\alpha h \pm(\epsilon_1 h_1+\epsilon_2 h_2)$, $\alpha h \pm (\epsilon_1 h_1-\epsilon_2 h_2)$ d'autre part ; on définit ensuite une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement à l'aide des fonctions $\lambda_{i,h}^\alpha = \frac{1}{h}\lambda_i(\frac{x}{h} - \alpha)$ $i = 0, 1$, où l'on a posé :

(II-1) $$\lambda_0 = (1-x_1-x_2)Y(1-x_1-x_2)Y(x_1)Y(x_2)+(1+x_1-x_2)Y(1+x_1-x_2)Y(-x_1)Y(x_2)$$

$$+ (1+x_1+x_2)Y(1+x_1+x_2)Y(-x_1)Y(-x_2)+(1-x_1+x_2)Y(1-x_1+x_2)Y(x_1)Y(-x_2)$$

ayant pour support le losange $\mathcal{L}^0$ de sommets $\pm e_1$, $\pm e_2$,

(II-2) $$\lambda_1 = (1-x_1)Y(1-x_1)Y(x_1+x_2)Y(x_1-x_2)+(1-x_2)Y(1-x_2)Y(x_1+x_2)Y(x_2-x_1)$$

$$+ (1+x_1)Y(1+x_1)Y(-x_1+x_2)Y(-x_1-x_2)+(1+x_2)Y(1+x_2)Y(x_1-x_2)Y(-x_1-x_2)$$

ayant pour support le rectangle $\mathcal{R}^0$ de sommets $\pm(e_1+e_2)$, $\pm(e_1-e_2)$

Ces fonctions vérifient une propriété de partition de l'unité au sens suivant :

(II-3) $$\sum_{\alpha \in Z^2} \lambda_{s_\alpha}(x-\alpha) = 1$$

où on a posé $s_\alpha = 0$ si $\alpha_1 + \alpha_2$ pair , $s_\alpha = 1$ si $\alpha_1 + \alpha_2$ impair .

D'autre part, elles admettent des dérivées du premier ordre au sens des distributions qui sont des fonctions de L^∞ à support compact ; elles peuvent donc servir à définir des approximations de $H^1(R^2)$ et l'on vérifie que celles-ci sont convergentes au sens suivant : si l'on pose

(II-4) $$p_h u_h = \sum_{\alpha \in Z^2} u_h^\alpha \lambda_{s_\alpha}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \qquad u_h = (u_h^\alpha)_\alpha \in l^2(Z^2)$$

alors pour toute fonction $u \in H^1(R^2)$, il existe une suite $u_h \in l^2(Z^2)$ telle que

(II-5) $$\lim_{h \to 0} \| u - p_h u_h \|_{H^1(R^2)} = 0$$

Il paraît donc naturel de chercher à généraliser de telles approximations à $H^m(R^n)$ et d'essayer de voir si l'on ne peut pas, pour la résolution approchée des problèmes aux limites, tirer parti de la flexibilité plus grande permise par la prise en considération des translatés de plusieurs fonctions différentes.

Nous allons voir que l'on peut en fait utiliser les translatés d'un nombre fini quelconque p de fonctions différentes pour la construction d'approximations de $H^m(R^n)$ et que les approximations ainsi construites, qui généralisent celles du Chapitre I, présentent du point de vue de la stabilité et du comportement de l'erreur les mêmes propriétés que celles-ci.

Nous montrerons dans les chapitres suivants qu'elles permettent de construire divers types de schémas approchés à p paramètres arbitraires généralisant des schémas connus et que l'on peut pour certains choix de ces paramètres améliorer certaines propriétés de ces schémas.

NOTATIONS

En plus des notations introduites en tête de ce travail, nous utiliserons dans ce chapitre les notations particulières suivantes :

si s et t sont des entiers positifs plus petits que p et si $s<t$ on attribuera à $s - t$ la valeur $p - s + t$; d'autre part, le signe $\sim$ désignera l'équivalence modulo-p de deux entiers.

II-2 PROPRIETES DES APPROXIMATIONS DE $H^m(R^n)$ PAR LES TRANSLATES DE p FONCTIONS.

Soit μ une mesure à support compact sur $\mathcal{C}(R^n)$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\text{(II-6)} \quad \begin{cases} <\mu, 1> = 1 \\ <\mu, e^{i2\pi\alpha x}> = 0 \qquad \forall \alpha \in Z^n \qquad \alpha \neq 0. \end{cases}$$

et soient p fonctions à support compact $f_0, f_1, \ldots f_{p-1}$ de $H^m(R^n)$, on peut alors définir pour tout multientier $r = (r_1, \ldots r_n) \neq 0$ de composantes r_i telles que $0 \leq r_i \leq m$ les fonctions :

$$\text{(II-7)} \quad \lambda_s^r = \chi_r * \mu + \sum_{t=0}^{p-1} P_{s-t}^r * f_t \qquad s = 0, 1, \ldots p-1$$

où l'on a posé :

$$\chi_r(x) = \chi^{*r_1}(x_1) \ldots \chi^{*r_n}(x_n) \qquad (\text{avec } \chi(t) = Y(t) - Y(t-1))$$

et où P_s^r est un opérateur de différences finies défini par :

$$\text{(II-8)} \quad P_s^r = \sum_{\substack{q \leq r \\ |q|_p \sim s}} (-1)^{|q|} C_r^q \, \delta_q \qquad s = 0, 1, \ldots p-1.$$

Remarque : Si l'on fait dans les formules (II-7) n=2 p=2 r=(1, 1) et si l'on choisit :

$$\text{(II-9)} \quad \begin{cases} \mu(\varphi) = \int_{-1}^{0} \varphi(t, t)\, dt \\ f_0 = -(1+x_1+x_2)Y(-1-x_1-x_2)Y(x_1+1)Y(x_2+1) + x_1 Y(-x_1)Y(x_2+1)Y(x_1-x_2) \\ \qquad + x_2 Y(-x_2)Y(x_1+1)Y(x_2-x_1) \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

on retrouve bien les fonctions λ_0 et λ_1 introduites par Friedrichs (cf. formules (II-1), (II-2)).

PROPOSITION II-1

Les fonctions λ_s^r vérifient la propriété de partition de l'unité

(II-10)
$$\sum_\alpha \lambda_{s_\alpha}(x-\alpha) = 1 \qquad (\text{avec } s_\alpha = p - |\alpha|_p)$$

Pour $r = (m)$, ces fonctions appartiennent à $H^m(R^n)$.

Nous ferons désormais l'hypothèse supplémentaire suivante :

il n'existe aucune relation linéaire entre les translatés d'ordre fini entier de $\theta_{(m)} = \chi_{(m)} * \mu$ et ceux des fonctions $f_0, f_1, \dots f_{p-1}$.

Nous désignons par $h = (h_1, \dots h_n)$ un vecteur de R^n à composantes positives plus petites que 1 et par u_h une suite de $l^2(Z^n)$, nous pouvons alors définir une application $p_h(\Lambda^{(m)})$ de $l^2(Z^n)$ dans $H^m(R^n)$ (appelée prolongement) par :

(II-11)
$$p_h(\Lambda^{(m)})\, u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \, (\lambda_{s_\alpha}^{(m)})_h^\alpha$$

où l'on a posé : $\sqrt{h} = (h_1 \dots h_n)^{1/2}$, $\Lambda^{(m)} = (\lambda_0^{(m)}, \dots \lambda_{p-1}^{(m)})$ et

$$(\lambda_s^{(m)})_h^\alpha = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \lambda_s^{(m)}\left(\frac{x_1}{h_1} - \alpha_1, \dots, \frac{x_n}{h_n} - \alpha_n\right)$$

D'autre part, nous définissons de même qu'en (I-36) une application r_h de $H^m(R^n)$ dans $l^2(Z^n)$ par :

(II-12)
$$r_h u = \left(\sqrt{h} \int \rho_h^\alpha \, u \, dx\right)_\alpha$$

avec α fonction à support compact de $L^1 \cap L^\infty$ de masse totale unité et

$$\rho_h^\alpha = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \rho\left(\frac{x_1}{h_1} - \alpha_1, \dots, \frac{x_n}{h_n} - \alpha_n\right)$$

Ces applications vérifient les propriétés suivantes analogues à celles

rencontrées au chapitre précédent (cf. Théorème I-2) :

THEOREME II-1

i) pour tout multientier $q < (m)$ on a :

(II-13)
$$D^q p_h(\Lambda^{(m)}) u_h = p_h(\Lambda^{(m)-q}) \overline{\nabla}_h^q u_h$$

où on a posé :

(II-14)
$$p_h(\Lambda^{(m)-q}) u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} u_h^\alpha (\lambda_{s_\alpha}^{(m)-q})_h^\alpha$$

$$\overline{\nabla}_h^q u_h = \left(\frac{1}{h^q} \sum_{j \leq q} (-1)^{|j|} C_q^j u_h^{\alpha - j}\right)_\alpha$$

ii) il existe des constantes positives M et M' indépendantes de h telles que :

(II-15)
$$M' |u_h|_{m,h} \leq \|p_h(\Lambda^{(m)}) u_h\|_{H^m} \leq M |u_h|_{m,h} \qquad \forall u_h \in l^2(Z^n).$$

iii) il existe C constante positive indépendante de h telle que :

(II-16)
$$|r_h u|_{m,h} \leq C \|u\|_{H^m}$$

où l'on a posé :

(II-17)
$$|u_h|_{0,h} = \left(\sum_\alpha |u_h^\alpha|^2\right)^{1/2}$$

$$|u_h|_{m,h} = \left(\sum_{|q| \leq m} |\overline{\nabla}_h^q u_h|_{0,h}^2\right)^{1/2}$$

D'autre part, il est possible de définir les fonctions $p_h(\Lambda^{(m)}) u_h$ à partir des prolongements construits au chapitre I de la manière suivante qui nous sera utile dans les chapitres III et IV.

PROPOSITION II-2

Les prolongements $p_h(\Lambda^{(m)})u_h$ peuvent être définis de manière équivalente à (II-11) par :

(II-11)'

$$p_h(\Lambda^{(m)})u_h = p_h^{(m)} u_h + \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} \bar{\nabla}^{(m)} u_h^\alpha \; f^\alpha_{s_\alpha, h}$$

où l'on a posé :

$$p_h^{(m)} u_h = \sqrt{h} \sum_\alpha u_h^\alpha \; \theta^\alpha_{(m),h} \quad \text{avec } \theta_{(m)} = \chi_{(m)} * \mu$$

$$\bar{\nabla}^{(m)} u_h = \Big(\sum_{j \le (m)} (-1)^{|j|} \; C^j_{(m)} \; u_h^{\alpha - j} \Big)_\alpha$$

et où $f_0, f_1, \ldots f_{p-1}$ désignent p fonctions à support compact de $H^m(R^n)$.

Il est maintenant possible d'associer à toute fonction $u \in H^m(R^n)$ la famille des fonctions $p_h(\Lambda^{(m)})r_h u \in H^m(R^n)$ et les opérateurs $p_h(\Lambda^{(m)})r_h \in \mathcal{L}(H^m, H^m)$ vérifient le

THEOREME II-2

i) les opérateurs $p_h(\Lambda^{(m)})r_h$ sont uniformément bornés dans $\mathcal{L}(H^m, H^m)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que :

(II-18)
$$\| p_h(\Lambda^{(m)})r_h \, u \|_{H^m} \le C \, \| u \|_{H^m} \qquad \forall u \in H^m(R^n)$$

ii) ils convergent simplement vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^m, H^m)$ c'est-à-dire que :

(II-19)
$$\lim_{h \to 0} \| u - p_h(\Lambda^{(m)})r_h u \|_{H^m} = 0 \qquad \forall u \in H^m(R^n)$$

On déduit également du Théorème II-1 l'estimation de la fonction de stabilité des approximations (II-11)(II-12), à savoir :

THEOREME II-3

la fonction de stabilité :

(II-20)
$$s_s^k \left(p_h(\Lambda^{(m)}) \right) = \sup_{u_h \in l^2} \frac{\| p_h(\Lambda^{(m)}) \, u_h \|_{H^s}}{\| p_h(\Lambda^{(m)}) u_h \|_{H^k}} \quad \text{où } k \le s \le m$$

vérifie la majoration :

(II-21)
$$S_s^k\ (p_h(\Lambda^{(m)})) \leq A\ \frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^s}$$

où A est une constante indépendante de h et $\bar{h} = \max_i h_i$, $\underline{h} = \min_i h_i$.

De même que pour les approximations construites au chapitre I, il est possible, sous certaines conditions que doivent vérifier les moments de la fonction ρ, de préciser le comportement pour h tendant vers zéro de l'erreur $u - p_h(\Lambda^{(m)})\ r_h\ u$. On a à ce sujet le

THEOREME II-4

Supposons que les moments $m_q(\rho) = \int \rho(t)\ t^q dt$ de la fonction ρ satisfont aux relations suivantes :

(II-22)
$$\sum_{0<l\leq j} C_j^l\ m_{j-l}\ \theta_{(m),l} = 0 \qquad \forall j \quad |j| \leq m$$

avec

(II-23)
$$\theta_{(m),l} = \frac{l}{p} \sum_{s=0}^{r-1} \left[(iD)^l\ \mathcal{F}\lambda_s^{(m)}\right]_{k=0}$$

(où $\mathcal{F}\lambda_s^{(m)} = \int e^{ikx}\ \lambda_s^{(m)}(x)\ dx$ désigne la transformée de Fourier de $\lambda_s^{(m)}$, alors quelle que soit $u \in H^{m+1}(R^n)$, on a pour $k \leq m$ et $k \leq s \leq m+1$ l'estimation suivante :

(II-24)
$$\|p_h(\Lambda^{(m)}) r_h u - u\|_{H^k} \leq C\bar{h}^{s+1-k}\ \|u\|_{H^{s+1}}$$

où $\bar{h} = \max(h_1, \ldots h_n)$.

De plus la fonction d'erreur des approximations (II-11)(II-12) définie par :

(II-25)
$$e_s^k\ (p_h(\Lambda^{(m)})) = \sup_{u\in H^s} \inf_{u_h \in l^2(Z^n)} \frac{\|p_h(\Lambda^{(m)})u_h - u\|_{H^k}}{\|u\|_{H^s}}$$

vérifie pour $k \leq m$, $k \leq s \leq m+1$ la majoration :

(II-26)
$$e_s^k\ (p_h(\Lambda^{(m)})) \leq C\bar{h}^{s-k}$$ avec C constante >0 indépendante de h.

Des inégalités (II-21) et (II-26) il résulte alors que :

COROLLAIRE II-4

On suppose qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h telle que : $\overline{h} < \sigma \underline{h}$ (avec $\overline{h} = \max_i h_i$, $\underline{h} = \min_i h_i$), alors le produit de la fonction d'erreur et de la fonction de stabilité des approximations (II-11), (II-12) de $H^m(R^n)$ est borné quel que soit $h \leq (1)$:

(II-27)
$$\sup_{h \leq (1)} S_s^k(p_h(\Lambda^{(m)}))\, e_s^k(p_h(\Lambda^{(m)})) \leq M < +\infty \quad 0 \leq k \leq s \leq m$$

II - 3 APPLICATION A LA RESOLUTION APPROCHEE DES PROBLEMES AUX LIMITES.

De même qu'au chapitre I, il est possible d'utiliser les approximations (II-11), (II-12) pour la résolution approchée des problèmes aux limites de la forme (I-1).

Ω désignant un ouvert borné ayant la propriété de m-prolongement (I-66), on définit :

(II-28) $$R_h^{(m),p}(\Omega) = \left\{ \alpha \in Z^n \mid \text{Support } (\lambda_{s_\alpha}^{(m)})_h^\alpha \cap \Omega \neq \emptyset \right\} \quad (\text{avec } s_\alpha = p - |\alpha|_p)$$

et on considère l'espace $l^2(R_h^{(m),p}(\Omega))$ des suites scalaires $u_h = (u_h^\alpha)_\alpha$ nulles en dehors de $R_h^{(m),p}(\Omega)$ muni du produit scalaire :

(II-29) $$(u_h, v_h)_h = \sum_{\alpha \in R_h^{(m),p}(\Omega)} u_h^\alpha \, v_h^\alpha$$

On peut alors définir des approximations de $H^m(\Omega)$ par :

(II-30) $$\begin{cases} p_{h,\Omega}(\Lambda^{(m)}) u_h = \rho(p_h(\Lambda^{(m)}) u_h) & u_h \in l^2(R_h^{(m),p}(\Omega)) \\ r_{h,\Omega} u = r_h(\pi u) \end{cases}$$

où π désigne l'opérateur de m-prolongement de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(R^n)$ et ρ l'opérateur de restriction à Ω des fonctions de $H^m(R^n)$.

On suppose l'opérateur r_h construit à l'aide d'une fonction ρ vérifiant les hypothèses (II-22), on a alors le

THEOREME II-5

Les opérateurs $p_{h,\Omega}(\Lambda^{(m)}) r_{h,\Omega}$ forment une famille uniformément bornée et convergeant vers l'identité dans $\mathcal{L}(H^m(\Omega), H^m(\Omega))$ c'est-à-dire :

(II-31)
$$\begin{cases} \text{i)} \quad \| p_{h,\Omega}(\Lambda^{(m)}) \, r_{h,\Omega} \, u \|_{H^m(\Omega)} \leq C \| u \|_{H^m(\Omega)} \quad \forall u \in H^m(\Omega) \\ \text{ii)} \quad \lim_{h \to 0} \| p_{h,\Omega}(\Lambda^{(m)}) r_{h,\Omega} \, u - u \|_{H^m(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in H^m(\Omega). \end{cases}$$

Si l'on suppose de plus que l'opérateur π applique $H^{m+1}(\Omega)$ dans $H^{m+1}(R^n)$ et si la fonction ρ vérifie les formules (II-22) jusqu'à l'ordre m, ils vérifient alors l'estimation d'erreur :

(II-32) $$\| p_{h,\Omega}(\Lambda^{(m)})\, r_{h,\Omega}\, u - u \|_{H^k(\Omega)} \leq C\, \overline{h}^{m+1-k}\, \| u \|_{H^{m+1}(\Omega)}$$

où $u \in H^{m+1}(\Omega)$ et $k \leq m+1$.

Considérons maintenant le problème variationnel (I-1) : à l'opérateur A et au second membre f nous pouvons associer l'opérateur approché A_h^k et le vecteur f_h^k définis respectivement par :

(II-33)
$$\begin{cases} (A_h^k u_h,\ v_h)_h = a(p_{h,\Omega}(\Lambda^{(k)})u_h,\ p_{h,\Omega}(\Lambda^{(k)})v_h) \\ (f_h^k,\ v_h)_h = \displaystyle\int_\Omega f(x)\, p_{h,\Omega}(\Lambda^{(k)})v_h\, dx. \end{cases}$$

où k est un entier $\geq m$ et $u_h,\ v_h \in l^2(R_h^{(m)}, p(\Omega))$

Nous pouvons alors considérer les problèmes approchés $A_h^k u_h = f_h^k$ et nous avons le :

THEOREME II-6

L'équation approchée

(II-34) $$A_h^k u_h = f_h^k$$

admet dans $V_h = l^2(R_h^k, p(\Omega))$ une solution unique qui converge pour $h \to 0$ vers la solution exacte de l'équation (I-1). Si d'autre part la solution exacte u appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ avec $k \geq m$, l'erreur $u - p_h^{(k)} u_h$ vérifie :

(II-35) $$\| u - p_h^{(k)}\, u_h \|_{H^m(\Omega)} \leq C\, \overline{h}^{k+1-m}$$ avec C constante

indépendante de h.

On peut remarquer maintenant que si l'on affecte les p fonctions arbitraires intervenant dans $p_h(\Lambda^{(k)})\, u_h$ de coefficients multiplicatifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{p-1}$ alors les éléments de la matrice A_h^k dépendent de ces coefficients de façon quadratique et l'on peut chercher à utiliser ce fait pour agir sur certaines caractéristiques de cette matrice telles que, par exemple, ses valeurs propres ; cependant, la dépendance quadratique des ε_s ne permet pas d'obtenir ainsi un domaine de variation étendu de ces caractéristiques puisque l'on ne peut alors descendre au dessous d'un certain minimum. C'est pourquoi nous introduirons dans le chapitre suivant des schémas approchés dépendant linéairement des ε_s et qui permettent ainsi une plus large variation des caractéristiques des matrices approchées.

III - CONSTRUCTION DE SCHEMAS APPROCHES DEPENDANT LINEAIREMENT DE p PARAMETRES ARBITRAIRES POUR LES PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES .

III- 1 INTRODUCTION

On a montré dans la section précédente la possibilité de construire pour les problèmes aux limites elliptiques des schémas approchés utilisant les approximations (II-11) (II-12) à p fonctions arbitraires $g_0, g_1, \ldots g_{p-1}$. Il se pose alors la question de savoir dans quelle mesure le choix de ces fonctions peut influer sur l'existence des solutions approchées et la convergence de celles-ci vers la solution exacte. On a vu que ce problème ne se pose pas pour les schémas considérés en (II-34) puisqu'il y a convergence des solutions approchées quelles que soient les fonctions $g_s \in H^k(R^n)$ à support compact. Cependant la dépendance quadratique des opérateurs approchés par rapport aux éléments arbitraires ne permet que des possibilités d'ajustement limitées à cause de l'existence de minimums. C'est pourquoi nous allons introduire ici des schémas faisant intervenir linéairement ces fonctions arbitraires.

Pour simplifier le problème, nous supposerons celles-ci fixées à des paramètres multiplicatifs près et nous étudierons la dépendance des solutions approchées par rapport à ces paramètres ; nous vérifierons qu'il y a existence et convergence des solutions approchées lorsque ces paramètres sont pris assez petits.

Partant d'un problème variationnel de la forme :

$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V$

nous lui associerons des schémas de la forme :

$a(p_h^\varepsilon u_h, p_h v_h) = (f, p_h v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$

ou encore :

$a(p_h u_h, p_h^\varepsilon v_h) = (f, p_h^\varepsilon v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$

avec :

$$p_h^{\epsilon} u_h = p_h u_h + \sum_{s=0}^{p-1} \epsilon_s q_h^s u_h$$

où $p_h u_h$ pourra désigner, comme par exemple à la Proposition II-2, des approximations de la forme (I-35).

III-2 CONVERGENCE DES SCHEMAS APPROCHES DEPENDANT LINEAIREMENT DE p PARAMETRES.

Le résultat principal sera donné par le théorème suivant et son corollaire relatif aux équations de la forme $Au + \lambda u = f$.

THEOREME III-1

Soit V un espace de Banach et soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$ telle que :

(III-1)

$$\text{i)} \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V$$

$$\text{ii)} \quad \text{Ré } a(v, v) \geq C \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V$$

avec M et C constantes positives.

Soit V_h un autre espace de Banach dépendant du paramètre h et soit p_h un isomorphisme de V_h dans V tel que :

il existe une application linéaire r_h de V dans V_h pour laquelle :

(III-2)

$$\lim_{h \to 0} \|u - p_h r_h u\|_V = 0 \qquad \forall u \in V$$

Soient $q_h^0, q_h^1, \ldots q_h^{p-1}$ des applications linéaires de V_h dans V telles qu'il existe des constantes positives A_s indépendantes de h telles que :

(III-3)

$$S(q_h^s, p_h) = \sup_{u_h \in V_h} \frac{\|q_h^s u_h\|_V}{\|p_h u_h\|_V} \leq A_s < +\infty$$

$s = 0, 1, \ldots p-1$

et posons :

(III-4)

$$p_h^\varepsilon u_h = p_h u_h + \sum_{s=0}^{p-1} \varepsilon_s q_h^s u_h$$

f étant un élément donné de V', nous considérons le problème variationnel :

(P) Trouver $u \in V$ tel que $a(u,v) = (f, v) \qquad \forall v \in V$

et le problème variationnel approché :

(P_h^ε) Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(p_h u_h,\ p_h^\varepsilon v_h) = (f,\ p_h^\varepsilon v_h)$

alors quels que soient $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots \varepsilon_{p-1}$ vérifiant :

(III-5) $$\sum_{s=0}^{p-1} A_s\ |\varepsilon_s| \leq \frac{C}{M}$$

le problème (P_h^ε) admet une solution unique u_h^ε qui converge vers la solution u de (P) au sens suivant :

(III-6) $$\lim_{h \to 0} \| u - p_h\ u_h^\varepsilon \|_V = 0$$

et l'on a l'estimation d'erreur :

(III-7) $$\| u - p_h\ u_h^\varepsilon \|_V \leq \left(1 + \frac{M\,\eta_{\varepsilon,h}}{C_{\varepsilon,h}}\right) \| u - p_h r_h u \|_V$$

où on a posé :

$$\eta_{\varepsilon,h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{\| p_h^\varepsilon v_h \|_V}{\| p_h u_h \|_V}$$

et où $C_{\varepsilon,h}$ est une constante positive telle que :

$$a(p_h u_h,\ p_h^\varepsilon\ u_h) \geq C_{\varepsilon,h}\ \| p_h u_h \|_V^2 \qquad \forall\, u_h \in V_h.$$

Si l'on suppose de plus que les opérateurs $q_h^s\ r_h$ $s = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1$ convergent simplement vers zéro dans $\mathcal{L}(V, V)$ pour $h \to 0$, c'est-à-dire :

(III-8) $$\lim_{h \to 0} \| q_h^s\ r_h\ u \|_V = 0 \qquad \forall\, u \in V \quad s = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1$$

alors, quels que soient $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots\ \varepsilon_{p-1}$ vérifiant (III-5) le problème variationnel approché :

$(P_h^\varepsilon)'$ Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(p_h^\varepsilon u_h,\ p_h v_h) = (f,\ p_h v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

admet une solution unique u_h^ε qui converge pour $h \to 0$ au sens (III-6) vers la solution u de (P). On a de plus l'estimation d'erreur :

(III-9)
$$\| u - p_h u_h^\varepsilon \|_V \leq \| u - p_h r_h u \|_V + \frac{M}{C_{\varepsilon,h}} \| u - p_h^\varepsilon r_h u \|_V$$

Pour le cas des équations de la forme $Au + \lambda u = f$ dans un espace de Hilbert, on peut se servir d'un résultat de [4] sur la stabilité des approximations des opérateurs de la forme $C = A + B$ où A est un isomorphisme d'un espace de Hilbert V sur un espace de Hilbert F et B un opérateur compact de V dans F, on est alors conduit au :

COROLLAIRE III-1

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et dense ; on suppose H identifié à son dual H'. Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$ vérifiant (III-1) et soit A défini par $(Au, v) = a(u, v)$ $\forall u, v \in V$. l'isomorphisme de V sur V' qu'elle définit.

Soient p_h un isomorphisme d'un espace de dimension finie V_h dans V vérifiant (III-2) et $q_h^0, \ldots q_h^{p-1}$ des applications de V_h dans V vérifiant (III-3).
Nous considérons le problème variationnel :

(P_λ) Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) + \lambda(u, v) = (f, v)$ pour tout $v \in V$ ainsi que le problème variationnel approché :

$(P_{\lambda,h}^\varepsilon)$ Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(p_h u_h, p_h^\varepsilon v_h) + \lambda (p_h u_h, p_h^\varepsilon v_h) = (f, p_h^\varepsilon v_h)$$

pour tout $v_h \in V_h$.

Alors si λ n'est pas valeur propre de A et si C_λ est une constante positive telle que pour tout $u \in V$ on ait

$$\| (A + \lambda I) u \|_{V'} \geq C_\lambda \| u \|_V,$$

le problème $(P^{\varepsilon}_{\lambda,h})$ admet pour $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{p-1}$ vérifiant :

(III-5)' $$\sum_{s=0}^{p-1} A_s |\varepsilon_s| < \frac{C_\lambda}{M + |\lambda|}$$

une solution unique u^{ε}_h qui converge vers la solution u de (P_λ) au sens (III-6).
Si de plus (III-8) est vérifiée, alors quels que soient $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{p-1}$ vérifiant (III-5), le problème variationnel approché :

$(P^{\varepsilon}_{\lambda,h})'$ Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(p^{\varepsilon}_h u_h, p_h v_h) + \lambda (p^{\varepsilon}_h u_h, p_h v_h) = (f, p_h v_h)$ $\forall v_h \in V_h$ admet une solution unique u^{ε}_h qui converge au sens de (III-6) vers la solution u de (P_λ) lorsque $h \to 0$.

Nous considérons maintenant le cas où V est un espace de Sobolev ; afin de pouvoir utiliser les approximations du Chapitre II, il est nécessaire de s'assurer qu'elles vérifient les conditions (III-3) et (III-8) du théorème précédent; nous avons à ce sujet les résultats suivants :

THEOREME III-2

i) On suppose les opérateurs p_h et q^s_h $s = 0, 1, \ldots p-1$ définis par :

(III-10)
$$\begin{cases} p_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha} u^{\alpha}_h \theta^{\alpha}_{(m),h} \\ q^s_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\substack{\alpha \in Z^n \\ |\alpha|_p = p-s}} \overline{\nabla}^{(m)} u^{\alpha}_h \; g^{\alpha}_{s,h} \quad s = 0, 1, \ldots p-1 \end{cases}$$

où $\theta_{(m)} = \chi_{(m)} * \mu$ et $g_0, g_1, \ldots g_{p-1}$ désignent p fonctions arbitraires à support compact de $H^m(R^n)$ (cf. (II-11)').

On suppose d'autre part que le pas $h = (h_1, \ldots h_n)$ vérifie

(III-11) $$\overline{h} < \sigma \, \underline{h} \qquad \text{avec } \overline{h} = \max_i h_i, \; \underline{h} = \min_i h_i \text{ et } \sigma \text{ constante}$$

positive indépendante de h, alors il existe des constantes $A_s > 0$ indépendantes de h telles que :

(III-12)
$$\sup_{u_h} \frac{\| q_h^s u_h \|_{H^m(R^n)}}{\| p_h^{(m)} u_h \|_{H^m(R^n)}} \leq A_s < +\infty \qquad s = 0, 1, \ldots p-1$$

Cette propriété est encore vraie si l'on remplace $H^m(R^n)$ par $H^m(\Omega)$ à condition que l'ouvert $\Omega \subset R^n$ vérifie la propriété de régularité suivante :

(III-13)
Pour tout polynôme Φ de multidegré m et pour tout entier α tel que : Support $\theta^{\alpha}_{(m),h} \cap \Omega \neq \emptyset$ il existe une sous-suite de h telle que :
$$\int_{[jh,(j+1)h]} |\Phi(x)|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega \cap [jh,(j+1)h]} |\Phi(x)|^2 \, dx$$
avec C constante indépendante de h.

ii) Soit Ω un ouvert de R^n $n \geq 2$ ayant la propriété de m-prolongement (c'est-à-dire tel qu'il existe une application continue π de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(R^n)$ (*) et soit r_h une restriction quelconque définie par (II-12), alors si le pas h vérifie la condition (III-11), on a :

(III-14)
$$\lim_{h \to 0} \| q_h^s r_h u \|_{H^m(\Omega)} = 0 \qquad \forall u \in H^m(\Omega) \quad s = 0, 1, \ldots p-1.$$

Ces résultats sont d'ailleurs conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION III-1

i) Soit Ω un ouvert de R^n possédant la propriété (III-13) et soit $u_h = (u_h^{\alpha})_{\alpha}$ une suite de $l^2(R^{(m)}_{h,\Omega})$ où on a posé :
$$R^{(m)}_{h,\Omega} = \left\{ \alpha \in Z^n \;\middle|\; \text{Support } \theta^{\alpha}_{(m),h} \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$
alors il existe une constante C_{Ω} indépendante de h telle que :

(*) pour laquelle $\pi u(x) = u(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

(III-15)

$$| \bar{\nabla}^{(m)} u_h |_{0,h} \leq C_\Omega \, \bar{h}^m \, \| p^{(m)}_{h,\Omega} \, u_h \|_{H^m(\Omega)}$$

où on a posé :

$\bar{h} = \max (h_1, \ldots h_n)$

$$| \bar{\nabla}^{(m)} u_h |_{0,h} = \left(\sum_\alpha | \bar{\nabla}^{(m)} u_h^\alpha |^2 \right)^{1/2}$$

$p^{(m)}_{h,\Omega} \, u_h = \rho \, p^{(m)}_h u_h$ (avec ρ opérateur de restriction à Ω).

ii) Soit Ω un ouvert borné et soit u_h une suite de $l^2(R^{(m)}_{h,\Omega})$, alors il existe une constante k_Ω indépendante de h telle que :

(III-16)

$$| \bar{\nabla}^{(m)} u_h |_{0,h} \geq k_\Omega \, h^{(m)} \| p^{(m)}_{h,\Omega} \, u_h \|_{H^m(\Omega)} \quad \text{où } (h^{(m)} = h_1^m \ldots h_n^m$$

III-3 CAS PARTICULIERS DES EQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Nous considérons maintenant plus en détail l'application des résultats précédents au cas des équations à coefficients constants. Nous allons montrer d'abord qu'il est dans ce cas possible par un choix convenable des fonctions $g_0, g_1, \ldots g_{p-1}$, de mettre la forme bilinéaire approchée $a(p_h^{(m)} u_h, p_h(\Lambda^{(m)}) v_h)$ sous la forme remarquable $a(p_h^{(m)} u_h, p_h(\Lambda^{(m)}) v_h) = a(p_h^{(m)} u_h, p_h^{(m)} v_h) + \sum_{\alpha} \varepsilon_{s_\alpha} Q_h^{s_\alpha} \bar{\nabla}^{(m)} u_h^{\alpha} \bar{\nabla}^{(m)} v_h^{\alpha}$ où les coefficients Q_h^s sont indépendants de u_h et v_h.

THEOREME III-3

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur $H^m(R^n)$ à coefficients constants définie par :

$$a(u, v) = \sum_{|q|, |r| \leq m} a_{qr} \int D^q u \, D^r v \, dx$$

Soit $a(p_h^{(m)} u_h, p_h(\Lambda^{(m)}) v_h)$ (resp. $a(p_h(\Lambda^{(m)}) u_h, p_h^{(m)} v_h)$) la forme bilinéaire approchée associée à $a(u, v)$ par les approximations (II-11) et supposons que celles-ci sont définies à partir de la fonction $\theta_{(m)} = \chi_{(m)} * \mu$ où $\chi_{(m)}$ désigne la puissance de convolution d'ordre $(m)=(m, \ldots m)$ de la fonction caractéristique du cube $(0) \leq x \leq (1)$ et μ une mesure à support compact contenu dans le cube $(-1) \leq x \leq (0)$ vérifiant (II-6) alors si l'on définit les fonctions $g_0, g_1, \ldots g_{p-1}$ par :

(III-17) $$g_s = D^{(m)} \psi_s \qquad s = 0, 1, \ldots p-1$$

où ψ_s est une fonction à support compact contenu dans le cube $(-1) \leq x \leq (0)$ telle que $D^{(m)} \psi_s \in H^m(R^n)$, on obtient pour :

$a(p_h^{(m)} u_h, p_h(\Lambda^{(m)}) v_h)$ (resp. $a(p_h(\Lambda^{(m)}) u_h, p_h^{(m)} v_h)$) l'expression suivante :

(III-18) $$a(p_h^{(m)} u_h, p_h(\Lambda^{(m)}) v_h) = a(p_h^{(m)} u_h, p_h^{(m)} v_h) + \sum_{\alpha} Q_h^{s_\alpha} \bar{\nabla}^{(m)} u_h^{\alpha} \bar{\nabla}^{(m)} v_h^{\alpha}$$

avec

$$Q_h^s = \sum_{|q|,\,|r|\le m} (-1)^{|q|+nm} \frac{a_{qr}}{h^{q+r}} \int D^{q+r}\,\psi_s \, d\mu \qquad s = 0,\ 1,\ \ldots p-1$$

(III-18)' (resp $a(p_h(\Lambda^{(m)})u_h,\ p_h^{(m)}v_h) = a(p_h^{(m)}u_h,\ p_h^{(m)}v_h) + \sum_\alpha \bar{Q}_h^{s\alpha}\,\bar{\nabla}^{(m)}u_h^\alpha\,\bar{\nabla}^{(m)}v_h^\alpha$

avec :

$$\bar{Q}_h^s = \sum_{|q|,\,|r|\le m} (-1)^{|r|+nm} \frac{a_{qr}}{h^{q+r}} \int D^{q+r}\,\psi_s \, d\mu.)$$

Utilisant les expressions (III-18) (resp. (III-18)') ainsi que la Proposition III-1 il est possible dans le cas des problèmes à coefficients constants d'obtenir des expressions explicites pour les constantes $C_{\varepsilon,h}$ et $\eta_{\varepsilon,h}$ du Théorème III-1 et d'arriver aux estimations d'erreur correspondantes ; on trouve ainsi pour le cas du Problème (I-1) l'estimation suivante valable dans le cas du schémas (P_h^ε) :

(III-19) $$\|u - p_h u_h^\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \le \left(1 + \frac{M\,\eta_{\varepsilon,h}}{C_{\varepsilon,h}}\right) \|u - p_h r_h u\|_{H^m(\Omega)}$$

(ainsi qu'une estimation analogue pour le schémas $(P_h^\varepsilon)'$), où l'on a posé :

$$C_{\varepsilon,h} = C - C_\Omega\ \bar{h}^{2m} \sum_{s=0}^{p-1} |\varepsilon_s|\ |Q_h^s|$$

$$\eta_{\varepsilon,h} = 1 + \sum_{s=0}^{p-1} |\varepsilon_s|\ S(q_h^s, p_h)$$

Cette estimation est valable tant que $C - C_\Omega\,\bar{h}^{2m} \sum_{s=0}^{p-1} |\varepsilon_s|\ |Q_h^s| > 0$

Si d'autre part on suppose que $\varepsilon_s\, Q_h^s \ge 0$ pour $s = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1$, alors on déduit de la Proposition III-1 une estimation analogue à (III-19) avec $C_{\varepsilon,h}$ remplacé par :

$$C'_{\varepsilon,h} = C + k_\Omega\, h^{2(m)}\ \inf_s\ (\varepsilon_s\, Q_h^s).$$

III-4 EXEMPLE D'APPLICATION ET RESULTATS NUMERIQUES

Nous considérons le problème à deux dimensions défini par :

$$\text{II-20)} \quad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega) & \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ a(u,v) = (f,v) & \forall\, v \in V \\ a(u,v) = \int_\Omega (D_1 u D_1 v + D_2 u\ D_2 v + \lambda uv)\, dx \\ (f,v) = \int_\Omega fv\, dx \quad \text{où } f \in L^2(\Omega) \text{ donnée.} \end{cases}$$

ou encore :

$$\text{III-20)'} \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \left(\text{avec } \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ce problème admet pour $\lambda > -2\,\pi^2$ une solution unique.
Nous allons lui associer des problèmes approchés en utilisant les approximations suivantes :

$$\text{III-21)} \quad \begin{cases} p_h u_h = \sqrt{h} \sum\limits_\alpha u_h^\alpha\, \theta_h^\alpha \quad , \quad \theta_h^\alpha = \dfrac{1}{h}\,\theta\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right) \quad (\theta \text{ définie en (I-10)}) \\ q_h u_h = \sqrt{h} \sum\limits_\alpha \bar{\nabla} u_h^\alpha\, g_h^\alpha \quad , \quad g_h^\alpha = \dfrac{1}{h}\, g\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right) \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$\bar{\nabla} u_h^\alpha = u_h^\alpha - u_h^{\alpha+\varepsilon_1} - u_h^{\alpha+\varepsilon_2} + u_h^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$g(x) = D_1\, D_2\, \chi^{*3}(3x) \qquad \text{avec } \chi \text{ fonction caractéristique de } [(0),(1)]$$

Nous désignerons par $V_h = l^2(R_{0,h}, (\Omega))$ l'ensemble des suites $(u_h^\alpha)_\alpha$ nulles en dehors de l'ensemble d'indices :

$$R_{0,h}(\Omega) = \left\{ \alpha \in Z^2 \mid 1 \le \alpha_1 \le N_1,\ 1 \le \alpha_2 \le N_2 \right\}$$

Nous trouvons alors pour $u_h,\ v_h \in V_h$:

$$(III\text{-}22)\quad \begin{cases} a(p_h u_h, p_h v_h) = \sum\limits_{\alpha} \left(-\dfrac{1}{h_1^2}\ \bar\nabla_1\ \nabla_1 u_h^\alpha - \dfrac{1}{h_2^2}\bar\nabla_2 \nabla_2\ u_h^\alpha + \lambda\ Q_h u_h^\alpha\right) v_h^\alpha \\ \\ a(q_h u_h, p_h v_h) = \left(\dfrac{3}{h_1^2} + \dfrac{3}{h_2^2} + \dfrac{11}{60}\lambda\right) \sum\limits_{\alpha} \bar\nabla u_h^\alpha \bar\nabla v_h^\alpha \end{cases}$$

$$\bar\nabla_i \nabla_i\ u_h^\alpha = u_h^{\alpha+\epsilon_i} - 2\ u_h^\alpha + u_h^{\alpha-\epsilon_i} \qquad i = 1,\ 2$$

$$Q_h\ u_h^\alpha = \frac{1}{12}\left(6u_h^\alpha + u_h^{\alpha+\epsilon_1} + u_h^{\alpha-\epsilon_1} + u_h^{\alpha+\epsilon_2} + u_h^{\alpha+\epsilon_1+\epsilon_2} + u_h^{\alpha-\epsilon_1+\epsilon_2} + u_h^{\alpha-\epsilon_2}\right)$$

Le schéma $(P_h^\epsilon)'$ donne alors naissance au système linéaire suivant :

$$(III\text{-}23)\quad -\frac{1}{h_1^2}\ \bar\nabla_1\ \nabla_1\ u_h^\alpha - \frac{1}{h_2^2}\ \bar\nabla_2 \nabla_2\ u_h^\alpha + \lambda Q_h\ u_h^\alpha + \epsilon\left(\frac{3}{h_1^2} + \frac{3}{h_2^2} + \frac{11}{60}\lambda\right) \bar\nabla \nabla u_h^\alpha = \sqrt{h} \int_\Omega f\ \theta_h^\alpha dx$$

où l'on a posé :

$$\bar\nabla \nabla u_h^\alpha = 4u_h^\alpha - 2(u_h^{\alpha+\epsilon_1} + u_h^{\alpha-\epsilon_1} + u_h^{\alpha+\epsilon_2} + u_h^{\alpha-\epsilon_2}) + u_h^{\alpha+\epsilon_1+\epsilon_2} + u_h^{\alpha+\epsilon_1-\epsilon_2} + u_h^{\alpha-\epsilon_1+\epsilon_2} + u_h^{\alpha-\epsilon_1-\epsilon_2}$$

Cependant afin de pouvoir étudier plus aisément les valeurs propres du système approché, il est préférable de considérer le schéma suivant :

$$(III\text{-}24)\quad a(\tilde p_h^\epsilon u_h, \tilde p_h v_h) = (f, \tilde p_h v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

où l'on a posé :

$$(III\text{-}25)\quad \begin{cases} \tilde p_h^\epsilon\ u_h = \dfrac{1}{2}(p_h u_h + \tilde p_h\ u_h) + \dfrac{\epsilon}{2}(q_h u_h + \tilde q_h u_h) \\ \tilde p_h u_h = \sqrt{h} \sum\limits_{\alpha} u_h^\alpha \tilde\theta_h^\alpha \qquad \text{avec } \tilde\theta_h^\alpha = \dfrac{1}{h}\ \tilde\theta\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right) \\ \tilde q_h u_h = \sqrt{h} \sum\limits_{\alpha} \bar\nabla u_h^\alpha \tilde g_h^\alpha \qquad \text{avec } \tilde g_h^\alpha = \dfrac{1}{h}\ \tilde g\left(\dfrac{x}{h} - \alpha\right) \end{cases}$$

avec :

$$\tilde\theta(x_1, x_2) = \theta(-x_1, x_2)$$
$$\tilde g(x_1, x_2) = g(-x_1, x_2).$$

On obtient alors le système linéaire suivant :

-26) $$-\frac{1}{h_1^2}\bar{\nabla}_1\nabla_1 u_h^\alpha - \frac{1}{h_2^2}\bar{\nabla}_2\nabla_2 u_h^\alpha + \lambda S_h u_h^\alpha + \varepsilon\left(\frac{3}{h_1^2}+\frac{3}{h_2^2}+\frac{11}{60}\lambda\right)\bar{\nabla}\nabla u_h^\alpha = \sqrt{h}\int_\Omega f\,\frac{\theta_h^\alpha+\tilde{\theta}_h^\alpha}{2}\,dx$$

où

$$S_h u_h^\alpha = \frac{1}{24}\left[12u_h^\alpha + 2(u_h^{\alpha+\varepsilon_1}+u_h^{\alpha-\varepsilon_1}+u_h^{\alpha+\varepsilon_2}+u_h^{\alpha-\varepsilon_2}) + u_h^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}+u_h^{\alpha+\varepsilon_1-\varepsilon_2}\right.$$

$$\left.+u_h^{\alpha-\varepsilon_1+\varepsilon_2}+u_h^{\alpha-\varepsilon_1-\varepsilon_2}\right]$$

Ce système admet les vecteurs propres $u_{q,h}$, où $q_1 = 1, 2, \ldots N_1$

$q_2 = 1, 2, \ldots N_2$, de composantes :

-27) $$u_{q,h}^\alpha = \sin \pi q_1 h_1 \alpha_1 \sin \pi q_2 h_2 \alpha_2 \qquad 1 \le \alpha_1 \le N_1 \qquad 1 \le \alpha_2 \le N_1$$

auxquels correspondent les valeurs propres :

-28) $$\lambda_{q,h}^\varepsilon = \frac{2}{h_1^2}(1-\cos\pi q_1 h_1) + \frac{2}{h_2^2}(1-\cos\pi q_2 h_2) + \frac{\lambda}{6}\left[2+(1+\cos\pi q_1 h_1)(1+\cos\pi q_2 h_2)\right]$$

$$+ 4\varepsilon\left(\frac{3}{h_1^2}+\frac{3}{h_2^2}+\frac{11}{60}\lambda\right)(1-\cos\pi q_1 h_1)(1-\cos\pi q_2 h_2)$$

Celles-ci dépendent linéairement de ε et l'on voit d'après le Théorème III-1 que les solutions approchées u_h^ε correspondantes vérifieront l'estimation d'erreur (III-9) tant que $C_{\varepsilon,h} > 0$, c'est-à-dire tant que la valeur propre minimum restera positive.

Pour ce qui concerne le choix du paramètre ε, on peut faire les remarques suivantes : La forme $a(\tilde{p}_h^\varepsilon u_h, \tilde{p}_h^\varepsilon v_h)$ étant symétrique en u_h et v_h, les vecteurs propres $u_{q,h}$ forment une base orthogonale de $R^{N_1 \times N_2}$ dans laquelle on peut exprimer le second membre f_h :

-29) $$f_h = \sum_q f_{q,h}\, u_{q,h}$$

et la solution du système approché est donnée a lors par :

-30) $$u_h^\varepsilon = \sum_q \frac{1}{\lambda_{q,h}^\varepsilon} f_{q,h}\, u_{q,h}$$

Lorsque $\lambda + 2\pi^2$ est positif très petit, la valeur propre $\lambda^{\varepsilon}_{(1),h}$ est voisine de zéro pour h assez petit, car elle admet le développement limité suivant autour de h = 0 :

(III-31) $$\lambda^{\varepsilon}_{(1),h} = \lambda + 2\pi^2 - \left(\frac{\pi^4}{12} + \lambda\frac{\pi^2}{6} - 3\varepsilon\pi^4\right)(h_1^2 + h_2^2) + 0(h^4)$$

de sorte que le terme prépondérant dans l'expression (III-20) est donné par :

$\frac{f_{1,h}}{\lambda^{\varepsilon}_{1,h}}\, u_{1,h}$ d'où une dépendance sensiblement homographique des composantes de u^{ε}_h par rapport à ε.

Si l'on désigne par A l'opérateur de V dans V' défini par $a(u, v) = (Au, v)$ l'erreur sur la solution approchée u^{ε}_h peut se caractériser par :

$$\|Ap_h u^{\varepsilon}_h - f\|_{V'} = \left\|\sum_q \frac{f_{q,h}}{\lambda^{\varepsilon}_{q,h}}\, Ap_h u_{q,h} - f\right\|_{V'}$$

Pour $\lambda + 2\pi^2$ petit on a de façon approchée :

$$\|Ap_h u^{\varepsilon}_h - f\|_{V'} \simeq \left\| \frac{1}{\lambda^{\varepsilon}_{(1),h}} \left(\sum{}' f_{q,h}\, A p_h\, u_{q,h}\right) - f\right\|_{V'}$$

où la sommation Σ' est étendue à tous les vecteurs propres $u_{q,h}$ correspondant à la valeur propre $\lambda^{\varepsilon}_{(1),h}$. Cette quantité atteint son minimum pour :

$$\frac{1}{\lambda^{\varepsilon}_{1,h}} = \frac{\sum_q{}' f_{q,h}((Ap_h u_{q,h}, f))_{V'}}{\left\|\sum_q{}' f_{q,h} Ap_h u_{q,h}\right\|^2_{V'}}$$

On voit que la détermination de la valeur optimale de ε supposé la connaissance des vecteurs propres $u_{q,h}$ correspondant à la valeur propre $\lambda^{\varepsilon}_{(1),h}$.

En pratique, on pourra, tout en conservant un pas h fixe, faire plusieurs essais avec différentes valeurs de ε, et comparer les valeurs de l'écart $\|Ap_h u^{\varepsilon}_h - f\|_{V'}$ correspondantes pour chercher à améliorer la précision des schémas classiques (obtenus pour ε=0) sans avoir à réduire le pas h.

Nous donnons pour terminer quelques résultats numériques pour la solution du problème (III-20) dans le cas où le second membre est défini par :

$f = (2\pi^2 + \lambda) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$

Les calculs ont été faits avec deux valeurs de λ différentes $\lambda = 0, \lambda = -19$ dont l'une voisine de la valeur propre $-2\pi^2 = -19,739...$

On remarquera que, si pour $\lambda = 0$ l'effet de variation de ϵ est relativement faible, il n'en est pas de même pour $\lambda = -19$, et que l'écart important entre solution approchée et solution exacte observé pour $\epsilon = 0$ peut être fortement réduit par un choix convenable de ϵ.

On notera d'autre part l'existence de deux valeurs de ϵ telles que les solutions approchées correspondantes encadrant la solution exacte $u = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$.

$h = 0,2$ $\lambda = 0$

Valeurs approchées calculées par (III-26) (entre parenthèses valeurs exactes)

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
$\varepsilon = 1$								
0,2	0,1568	(0,3455)	0,2526	(0,5590)	0,2516	(0,5590)	0,1548	(0,3455)
0,4	0,2526	(0,5590)	0,4082	(0,9045)	0,4076	(0,9045)	0,2516	(0,5590)
0,6	0,2516	(0,5590)	0,4076	(0,9045)	0,4082	(0,9045)	0,2526	(0,5590)
0,8	0,1548	(0,3455)	0,2516	(0,5590)	0,2526	(0,5590)	0,1568	(0,3455)
$\varepsilon = 0$								
0,2	0,3396	(0,3455)	0,5435	(0,5590)	0,5384	(0,5590)	0,3290	(0,3455)
0,4	0,5435	(0,5590)	0,8766	(0,9045)	0,8741	(0,9045)	0,5384	(0,5590)
0,6	0,5384	(0,5590)	0,8741	(0,9045)	0,8766	(0,9045)	0,5435	(0,5590)
0,8	0,3290	(0,3455)	0,5384	(0,5590)	0,5435	(0,5590)	0,3396	(0,3455)
$\varepsilon = 0,02$								
0,2	0,3480	(0,3455)	0,5564	(0,5590)	0,5509	(0,5590)	0,3364	(0,3455)
0,4	0,5564	(0,5590)	0,8972	(0,9045)	0,8945	(0,9045)	0,5509	(0,5590)
0,6	0,5509	(0,5590)	0,8945	(0,9045)	0,8972	(0,9045)	0,5564	(0,5590)
0,8	0,3364	(0,3455)	0,5509	(0,5590)	0,5564	(0,5590)	0,3480	(0,3455)

$h = 0,2$ $\lambda = 0$ Valeurs approchées calculées par (III-26) (entre parenthèses valeurs exactes).

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
$\varepsilon = -0,08$								
0,2	0,3764	(0,3455)	0,5980	(0,5590)	0,5921	(0,5590)	0,3597	(0,3455)
0,4	0 5990	(0,5590)	0,9657	(0,9045)	0,9617	(0,9045)	0,5922	(0,5590)
0,6	0,5922	(0,5590)	0,9617	(0,9045)	0,9657	(0,9045)	0,5990	(0,5590)
0,8	0,3597	(0,3455)	0,5922	(0,5590)	0,5990	(0,5590)	0,3764	(0,3455)

$h = 0,2$ $\lambda = -19$

Valeurs approchées calculées par (III-26)

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
	$\varepsilon = 0,04$							
0,2	0,0736	(0,3455)	0,1189	(0,5590)	0,1187	(0,5590)	0,0732	(0,3455)
0,4	0,1189	(0,5590)	0,1922	(0,9045)	0,1922	(0,9045)	0,1187	(0,5590)
0,6	0,1187	(0,5590)	0,1922	(0,9045)	0,1922	(0,9045)	0,1189	(0,5590)
0,8	0,0732	(0,3455)	0,1187	(0,5590)	0,1189	(0,5590)	0,0736	(0,3455)
	$\varepsilon = 0$							
0,2	0,0997	(0,3455)	0,1612	(0,5590)	0,1610	(0,5590)	0,0993	(0,3455)
0,4	0,1612	(0,5590)	0,2607	(0,9045)	0,2606	(0,9045)	0,1610	(0,5590)
0,6	0,1610	(0,5590)	0,2606	(0,9045)	0,2607	(0,9045)	0,1612	(0,5590)
0,8	0,0993	(0,3455)	0,1610	(0,5590)	0,1612	(0,5590)	0,0998	(0,3455)
	$\varepsilon = -0,04$							
0,2	0,1549	(0,3455)	0,2503	(0,5590)	0,2500	(0,5590)	0,1543	(0,3455)
0,4	0,2503	(0,5590)	0,4048	(0,9045)	0,4047	(0,9045)	0,2500	(0,5590)
0,6	0,2500	(0,5590)	0,4047	(0,9045)	0,4048	(0,9045)	0,2503	(0,5590)
0,8	0,1543	(0,3455)	0,2500	(0,5590)	0,2503	(0,5590)	0,1549	(0,3455)

$h = 0,2$ $\lambda = -19$ Valeurs approchées calculées par (III-26)

$\varepsilon = -0,08$

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
0,2	0,3461	(0,3455)	0,5595	(0,5590)	0,5591	(0,5590)	0,3453	(0,3455)
0,4	0,5595	(0,5590)	0,9051	(0,9045)	0,9049	(0,9045)	0,5591	(0,5590)
0,6	0,5591	(0,5590)	0,9049	(0,9045)	0,9051	(0,9045)	0,5595	(0,5590)
0,8	0,3453	(0,3455)	0,5591	(0,5590)	0,5595	(0,5590)	0,3461	(0,3455)

IV - APPROXIMATION DES EQUATIONS D'EVOLUTION DU PREMIER ORDRE PAR DES SCHEMAS A UN DEGRE DE LIBERTE.

IV-1 INTRODUCTION

Dans le présent chapitre on montre comment les approximations du Chapitre II comportant des éléments arbitraires peuvent être appliquées à la résolution des problèmes aux limites dépendant du temps et comment leur emploi avec les schémas discrets explicites permet d'élargir les critères de stabilité classiques :

Si l'on considère en effet un problème d'évolution dans un espace de Hilbert V de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)\, u = f & t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{IV-1}$$

où A(t) est un isomorphisme de V sur V' (que l'on suppose défini par une forme bilinéaire continue et coercive sur V x V) et si l'on se donne des approximations (V_h, p_h, r_h) de V avec V_h espace de dimension finie, on peut associer au problème ci-dessus les problèmes différentiels approchés (ou schémas semi-discrétisés) suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h(t)\, u_h = f_h & t \in]0, T[\\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases} \tag{IV-2}$$

où $A_h(t)$, u_{0h} et f_h sont des approximations de A(t), u_0 et f respectivement (par exemple on peut prendre $A_h(t) = r_h^* A(t) p_h$, $u_{0h} = r_h^* u_0$, $f_h = r_h^* f$ où r_h^* désigne le transposé de p_h).

D'autre part si l'on se donne un pas en temps k, on peut associer à (IV-1) les problèmes discrets suivants :

(IV-3)
$$\begin{cases} \dfrac{u_\zeta^{\mu+1} - u_\zeta^\mu}{k} + A_{\varepsilon,\zeta}^\mu \, u_\zeta^\mu = f_\zeta^\mu & \mu = 1, 2, \ldots \dfrac{T}{k} - 1 \\ u_\zeta^1 = u_{0h} \end{cases}$$

où $(u_\zeta^\mu)\, 1 \leq \mu \leq \dfrac{T}{k} - 1$ désigne une suite de vecteurs de V_h et A_ζ^μ, f_ζ^μ sont des valeurs moyennes sur l'intervalle $[(\mu-1)k, \mu k]$ des opérateurs $A_h(t)$ et f_h.

Si l'on suppose pour simplifier que $A(t)$ est autoadjoint de même que ses approximations $A_h(t)$ et A_ζ^μ, alors on sait qu'une condition (dite condition de stabilité du schéma (IV-3)) pour que les erreurs éventuelles survenant au cours du calcul des u_ζ^μ ne soient pas amplifiées au-delà de toute limite est que les pas h et k vérifient une relation de la forme :

$$k < \frac{2}{\rho(A_\zeta^\mu)} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \frac{T}{k} - 1$$

où $\rho(A_\zeta^\mu)$ désigne le rayon spectral de la matrice A_ζ^μ.

Nous associons ici aux opérateurs $A(t)$ des opérateurs approchés définis par :

$$A_h^\varepsilon(t) = r_h^* \, A(t) \, p_h^\varepsilon$$

et

$$A_{\varepsilon,\zeta}^\mu = \int_{(\mu-1)k}^{\mu k} A_h^\varepsilon(t) \, dt$$

(où p_h^ε est un prolongement du type considéré en (III-4)) et nous remplaçons les schémas (IV-2) et (IV-3) par :

(IV-5)
$$\begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h^{\varepsilon}(t)\, u_h = f_h \\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases}$$

et :

(IV-6)
$$\begin{cases} \dfrac{u_\zeta^{\mu+1} - u_\zeta^{\mu}}{k} + A_{\varepsilon,\zeta}^{\mu}\, u_\zeta^{\mu} = f_\zeta^{\mu} \\ u_\zeta^{1} = u_{0h} \end{cases}$$

Nous montrons alors que :

1°) Si ε est assez petit, les solutions $u_h^{\varepsilon}(t)$ de (IV-5) et u_ζ^{ε} de (IV-6) convergent dans V vers la solution exacte de (IV-1)

2°) la condition de stabilité des solutions approchées est de la forme :

(IV-7)
$$k < \frac{2}{\rho(A_{\varepsilon,\zeta}^{\mu})} \qquad \mu = 1,\ 2,\ \ldots\ \frac{T}{k} - 1$$

Nous montrons ensuite que pour certains choix des prolongements p_h^{ε} et du paramètre ε, le rayon spectral $\rho(A_{\varepsilon,\zeta}^{\mu})$ peut être rendu plus petit que $\rho(A_\zeta^{\mu})$, ce qui permet d'utiliser des pas en temps plus grands, d'où une réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer et par suite du temps de calcul.

IV-2 - CONSTRUCTION DE SCHEMAS APPROCHES SEMI-DISCRETS A UN DEGRE DE LIBERTE.

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection continue et dense. On suppose H identifié à son dual H' et on a donc $V \subset H \subset V'$ avec injections continues et denses. La variable t désignant le temps, on suppose que $t \in]0, T[$, $T < \infty$ et on introduit les espaces de Hilbert suivants :

- $\mathcal{V} = L^2(0, T ; V)$ muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt\right)^{1/2}$

(où $L^2(0, T ; V)$ est l'espace des fonctions $t \to u(t)$ de $]0, T[$ dans V mesurables et telles que $\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt < \infty$)

- $\mathcal{V}' = L^2(0, T ; V')$ muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{V}'} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt\right)^{1/2}$

- $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V} \mid \frac{du}{dt} \in \mathcal{V}'\}$ muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{W}} = (\|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\frac{du}{dt}\|_{\mathcal{V}'}^2)^{1/2}$

où $\frac{du}{dt}$ désigne la dérivée au sens des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans V' définie par :

$$\int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v\right) \varphi(t) \, dt = \int_0^T (u(t), v) \varphi'(t) \, dt$$

On se donne une famille de formes bilinéaires continues sur V $a(t;u, v)$ telles que :

(IV-8)
$$\begin{cases} \text{i) } t \to a(t ; u, v) \text{ est mesurable pour u et v fixés dans V} \\ \text{ii) } |a(t ; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \\ \text{iii) Ré } a(t ; v, v) + \lambda |v|_H^2 \geq c\|v\|_V^2 \end{cases}$$

où M et C désignent des constantes positives indépendantes de t.

$a(t\,;\,u,v)$ définit alors un opérateur linéaire continu A(t) de V dans V' tel que :

$$a(t;\,u,v) = (A(t)\,u,\,v)$$

On se donne ensuite $f \in \mathcal{V}'$, $u_0 \in H$ et on considère le problème suivant :

(P_t) Trouver $u \in \mathcal{W}$ tel que :

(IV-9)
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{V}' \\ u(0) = u_0 \qquad \text{dans } H \end{cases}$$

On sait (cf. [14]) que ce problème admet une solution unique $u \in \mathcal{W}$ (on supposera dans la suite que l'on a fait le changement de fonction $\tilde{u} = e^{\lambda t}u$ ce qui permet d'écrire l'inégalité (IV-8)iii avec $\lambda = 0$). On se donne maintenant des approximations (V_h, p_h, r_h^*) de l'espace V où V_h est un espace de dimension finie, p_h un isomorphisme de V_h dans V et r_h^* son transposé défini par :

$$(r_h^* f, v_h)_h = (f, p_h v_h) \qquad f \in V' \qquad v_h \in V_h$$

(où $(f_h, v_h)_h$ $f_h \in V_h'$, $v_h \in V_h$ désigne la dualité entre V_h' et V_h). V_h est supposé muni des deux normes $|u_h|_h = (u_h, u_h)_h^{1/2}$ et $\|u_h\|_h = \|p_h u_h\|_V$ tandis que V_h' sera muni de la norme duale :

(IV-10)
$$\|f_h\|_{*h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f_h, v_h)_h|}{\|p_h v_h\|_V}$$

On définit ensuite les espaces :

$$\mathcal{V}_h = L^2(0,\, T\,;\, V_h) \text{ muni de la norme } \|v_h\|_h = \left(\int_0^T \|v_h\|_h^2 \, dt\right)^{1/2}$$

$\mathcal{V}'_h = L^2(0, T ; V'_h)$ muni de la norme $\|f_h\|_{\mathcal{V}'_h} = \left(\int_0^T \|f_h\|^2_{*h} dt\right)^{1/2} = \sup_{v_h \in \mathcal{V}_h} \frac{\left|\int_0^T (f_h, v_h)_h dt\right|}{\left(\int_0^T \|v_h\|^2_h dt\right)^{1/2}}$

$\mathcal{W}_h = \{u_h \in \mathcal{V}_h \mid \frac{du_h}{dt} \in \mathcal{V}'_h\}$ muni de la norme $\|u_h\|_{\mathcal{W}_h} = \left(\|u_h\|^2_{\mathcal{V}_h} + \left\|\frac{du_h}{dt}\right\|^2_{\mathcal{V}'_h}\right)^{1/2}$

Enfin on désigne par q_h un opérateur linéaire de V_h dans V tel que :

$$\text{(IV-11)} \qquad \sup_{u_h \in V_h} \frac{\|q_h u_h\|_V}{\|p_h u_h\|_V} \leq \omega < +\infty$$

et on pose :

$p_h^\varepsilon u_h = p_h u_h + \varepsilon q_h u_h$ avec ε paramètre réel.

On associe à (P_t) les problèmes différentiels approchés $(P^\varepsilon_{t,h})$ et $(P^\varepsilon_{t,h})'$ définis par :

Problème $(P^\varepsilon_{t,h})$: Trouver $u_h \in \mathcal{W}_h$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h^\varepsilon(t) u_h = f_h \\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases}$$

avec :

$A_h^\varepsilon(t) = r_h^* A(t) p_h^\varepsilon$, $f_h = r_h^* f$, $u_{0h} = r_h^* u_0$

Problème $(P^\varepsilon_{t,h})'$: Trouver $u_h \in \mathcal{W}_h$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h^\varepsilon(t) u_h = f_h \\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases}$$

avec :

$$A_h^\varepsilon(t) = (r_h^\varepsilon)^* \; A(t) \; p_h, \quad f_h = (r_h^\varepsilon)^* f, \quad u_{0h} = (r_h^\varepsilon)^* u_0$$

Comme $(A_h^\varepsilon(t)\, u_h, u_h)_h \geq (C - |\varepsilon| M\omega) \|p_h u_h\|^2$, l'opérateur $A_h^\varepsilon(t)$ est un isomorphisme de V_h sur V'_h et les problèmes $(P^\varepsilon_{t,h})$ et $(P^\varepsilon_{t,h})'$ admettent chacun une solution unique.

Ces solutions dépendent continuement des données f_h et u_{0h}, plus précisément on a le :

THEOREME IV-1 Les solutions des problèmes $(P^\varepsilon_{t,h})$ et $(P^\varepsilon_{t,h})'$ vérifient pour $|\varepsilon| < \frac{C}{M\omega}$ des inégalités de l'énergie de la forme :

(IV-12)
$$\sup_{t\in(0,T)} |u_h(t)|_h^2 + \int_0^T \|u_h^\varepsilon(t)\|_h^2 \, dt \leq K_\varepsilon \left(|u_{0h}|_h^2 + \int_0^T \|f_h\|_{*h}^2 \, dt \right)$$

avec K_ε constante indépendante de t et h .

D'autre part, moyennant certaines hypothèses sur les approximations (V_h, p_h, r_h^*), les solutions u_h^ε convergent dans $\mathcal{W}$ pour $h \to 0$ vers la solution exacte u du problème (P_t).

THEOREME IV-2 Supposons que les approximations autoadjointes (V_h, p_h, r_h^*) sont convergentes, c'est-à-dire que :

(IV-13)
$$\text{i)} \lim_{h\to 0} \|u - p_h r_h^* u\|_V = 0 \qquad \forall\, u \in V$$
$$\text{ii)} \lim_{h\to 0} \|f - p_h r_h^* f\|_{V'} = 0 \qquad \forall\, f \in V'$$

et que d'autre part pour $f_h \in V'_h$ on a :

(IV-14)
$$\|p_h f_h\|_{V'} \leq \|f_h\|_{*h} \qquad \left(\text{avec } \|f_h\|_{*h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f_h, v_h)_h|}{\|p_h v_h\|_V}\right)$$

Supposons de plus qu'il existe des constantes ω et ω' telles que :

$$\begin{cases} \|q_h u_h\|_V \leq \omega \|u_h\|_h & \forall u_h \in V_h \\ \|q_h f_h\|_{V'} \leq \omega' \|f_h\|_{*h} & \forall f_h \in V' \end{cases} \tag{IV-15}$$

et que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \|q_h r_h^* u\|_V = 0 & \forall u \in V \\ \lim\limits_{h \to 0} \|q_h r_h^* f\|_{V'} = 0 & \forall f \in V' \end{cases} \tag{IV-16}$$

alors pour $|\varepsilon| < \frac{C}{M\omega}$ les solutions des problèmes $(P^{\varepsilon}_{t,h})$ convergent dans $\mathcal{W}$ lorsque $h \to 0$ vers la solution u du problème (P_t).

$$\lim_{h \to 0} \int_0^T (\|u(t) - p_h u_h^{\varepsilon}(t)\|_V^2 + \|u'(t) - p_h u_h^{\varepsilon}(t)\|_{V'}^2)\, dt = 0 \tag{IV-17}$$

D'autre part, si l'on suppose au lieu de (IV-16) que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \|p_h {}^t q_h u\|_V = 0 & \forall u \in V \\ \lim\limits_{h \to 0} \|p_h {}^t q_h f\|_{V'} = 0 & \forall f \in V' \end{cases} \tag{IV-16}'$$

alors les solutions des problèmes $(P^{\varepsilon}_{t,h})'$ convergent pour $|\varepsilon| < \frac{C}{M\omega}$ vers la solution u de (P_t) dans $\mathcal{W}$.

Nous effectuons maintenant la discrétisation complète du problème (P_t) de façon à nous ramener à des systèmes d'équations algébriques linéaires plus aisément exploitables sur calculateur.

IV - 3 CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS DISCRETES A UN DEGRE DE LIBERTE.

Soit k un nombre positif plus petit que T qui sera appelé le pas en temps et désignons par ζ le couple (h,k). Il nous faut définir d'abord une famille d'approximations de l'espace $\mathcal{V}_h = L^2(0, T ; V_h)$; pour cela nous posons :

(IV-18)
$$\begin{cases} \text{i)} \quad \mathcal{V}_\zeta = \text{espace des suites } u_\zeta = (u_\zeta^\mu)_\mu \text{ à valeurs dans } V_h \text{ avec } 1 \le \mu \le \frac{T}{k} - 1 \\ \text{ii)} \quad p_k u_\zeta = \sqrt{k} \sum_\mu u_\zeta^\mu \, \vec{\chi}_k^\mu \qquad \text{où } u_\zeta = (u_\zeta^\mu)_\mu \in \mathcal{V}_\zeta \\ \text{iii)} \quad r_k^* u_h = (\sqrt{k} \int_0^T u_h(t) \, \vec{\chi}_k^\mu(t) \, dt)_\mu \qquad \text{où } u_h \in \mathcal{V}_h \end{cases}$$

avec $\bar{\chi}$ fonction caractéristique de l'intervalle (-1, 0) et $\vec{\chi}_k^\mu(t) = \frac{1}{k} \bar{\chi} (\frac{t}{k} - \mu)$

Nous supposerons $\mathcal{V}_\zeta$ muni du produit scalaire :

(IV-19)
$$(u_\zeta, v_\zeta)_{\mathcal{V}_\zeta} = \int_0^T (p_k u_\zeta, p_k v_\zeta)_h \, dt = \sum_{\mu=1}^{T/k-1} (u_\zeta^\mu , v_\zeta^\mu)_h$$

Nous pouvons alors associer aux problèmes semi-discrets $(P_{t,h}^\varepsilon)$(resp. $(P_{t,h}^\varepsilon)'$) les problèmes discrets explicites (P_ζ^ε)(resp. $(P_\zeta^\varepsilon)'$) définis par :

Problème (P_ζ^ε) (resp. $(P_\zeta^\varepsilon)'$):

Trouver $u_\zeta \in \mathcal{V}_\zeta$ tel que :

(IV-20)
$$\begin{cases} \nabla_k u_\zeta^\mu + A_{\varepsilon,\zeta}^\mu \, u_\zeta^\mu = f_\zeta^\mu \qquad \text{pour } \mu = 1, 2, \ldots \frac{T}{k} - 1 \\ u_\zeta^1 = \sqrt{k} \, u_{0h} \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$\nabla_k u_\zeta^\mu = \frac{u_\zeta^{\mu+1} - u_\zeta^\mu}{k}$$

et :

(IV-21)
$$\begin{cases} A^{\mu}_{\varepsilon,\zeta} = \displaystyle\int_0^T \bar{\chi}^{\mu}_k \; A^{\varepsilon}_h(t)\, dt \\ f^{\mu}_{\zeta} = \sqrt{k} \displaystyle\int_0^T \bar{\chi}^{\mu}_k(t)\, f_h(t)\, dt \end{cases}$$

avec (cas du problème $(P^{\varepsilon}_{\zeta})$) :

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}_h(t) = r^{*}_h A(t)\, p^{\varepsilon}_h \\ f_h(t) = r^{*}_h f(t) \end{cases}$$

(resp. pour le problème $(P^{\varepsilon}_{\zeta})'$:

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}_h(t) = (r^{\varepsilon}_h)^{*} A(t)\, p_h \\ f_h(t) = (r^{\varepsilon}_h)^{*} f(t) \end{cases} \quad)$$

De même que dans le cas des problèmes semi-discrets, les solutions u^{ε}_{ζ} des problèmes $(P^{\varepsilon}_{\zeta})$ (resp. $(P^{\varepsilon}_{\zeta})'$) vérifient pour ε assez petit une inégalité de l'énergie.

THEOREME IV-3

On suppose vérifiées les conditions :

(IV-22)
$$\begin{cases} |\varepsilon| < \dfrac{C}{M\omega} \\ k < \dfrac{2C_{\varepsilon}}{M^2_{\varepsilon}\, S(h)^2} \quad (1 - \eta) \end{cases}$$

où η est un nombre positif arbitrairement petit et où l'on a posé :

$$C_{\varepsilon} = C - |\varepsilon|\, M\omega$$

$$M_\varepsilon = M(1 + |\varepsilon|\omega)$$

$$S(h) = \sup_{u_h} \frac{\|p_h u_h\|_V}{|u_h|_h}$$

alors les solutions u_ζ^ε des problèmes (P_ζ^ε) et $(P_\zeta^\varepsilon)'$ vérifient une inégalité de l'énergie de la forme :

(IV-23)
$$\sup_{t\in[0,T]} |p_k u_\zeta^\varepsilon(t)|_h^2 + \int_0^T \|p_k u_\zeta^\varepsilon\|_h^2 \, dt \le K_\varepsilon \{ |u_{0h}|_h^2 + \int_0^T \|p_k f_\zeta\|_{*h}^2 dt \}$$

où K_ε désigne une constante indépendante de h, k, t.

Si l'on fait sur les approximations (V_h, p_h, r_h^*) de V l'hypothèse suivante :

Il existe une constante C_H indépendante de h telle que $|p_h u_h|_H \le C_H |u_h|_h$ pour tout $u_h \in V_h$,

on peut récrire l'inégalité de l'énergie (IV-23) sous la forme suivante :

$$\sup_{t\in[0,T]} |p_\zeta u_\zeta^\varepsilon(t)|_H^2 + \int_0^T \|p_\zeta u_\zeta^\varepsilon\|_V^2 dt \le Q_\varepsilon \{ |u_{0h}|_h^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt \}$$

avec Q_ε constante indépendante de h, k, t. On voit alors que pour h, k, ε vérifiant les conditions (IV-22) les normes de $p_\zeta u_\zeta^\varepsilon$ dans $L^\infty(0, T ; H)$ et $L^2(0, T ; V)$ sont majorées par une quantité fixe ; on a donc le

COROLLAIRE IV-3 — Les solutions des problèmes approchés (P_ζ^ε) et $(P_\zeta^\varepsilon)'$ sont au sens de [17] $L^\infty(0, T ; H)$ - et $L^2(0, T ; V)$-stables .

Faisant maintenant l'hypothèse que les approximations (V_h, p_h, r_h^*) sont convergentes, nous pouvons déduire de l'inégalité de l'énergie (IV-23) la convergence pour h, $k \to 0$ des solutions approchées des problèmes (P_ζ^ε) et $(P_\zeta^\varepsilon)'$

THEOREME IV-4

Supposons les approximations autoadjointes (V_h, p_h, r_h^*) stables et convergentes c'est-à-dire :

(IV-13)
$$\begin{cases} \text{i)} & \lim_{h \to 0} \|u - p_h r_h^* u\|_V = 0 \qquad \forall\, u \in V \\ \text{ii)} & \lim_{h \to 0} \|f - p_h\, r_h^*\, f\|_{V'} = 0 \qquad \forall\, f \in V' \end{cases}$$

(IV-14)
$$\|p_h\, f_h\|_{V'} \leq \|f_h\|_{*h} \qquad \forall\, f_h \in V'_h$$

et supposons de plus que les opérateurs q_h vérifient les propriétés suivantes :

(IV-15)
$$\begin{cases} \|q_h u_h\|_V \leq \omega \|u_h\|_h & \forall\, u_h \in V_h \\ \|q_h\, f_h\|_{V'} \leq \omega' \|f_h\|_{*h} & \forall\, f_h \in V'_h \end{cases}$$

(IV-16)
$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} \|q_h r_h^* u\|_V = 0 & \forall\, u \in V \\ \lim_{h \to 0} \|q_h\, r_h^*\, f\|_{V'} = 0 & \forall\, f \in V' \end{cases}$$

Alors si les conditions de stabilité :

(IV-24)
$$\begin{cases} |\varepsilon| < \dfrac{C}{M\omega} \\ k < \dfrac{2C_\varepsilon}{M_\varepsilon^2\, S(h)^2}\,(1-\eta) \text{ (avec } \eta > 0 \text{ arbitrairement petit)} \end{cases}$$

sont satisfaites, les solutions u_ζ^ε des problèmes (P_ζ^ε) convergent dans $\mathcal{W}$ pour $\zeta \to 0$ vers la solution u de (P)

$$\lim_{\zeta \to 0} \Big[\Big(\int_0^T \|u - p_\zeta\, u_\zeta^\varepsilon\|_V^2\, dt \Big)^{1/2} + \Big(\int_0^T \|u' - p_\zeta \nabla_k u_\zeta^\varepsilon\|_{V'}^2\, dt \Big)^{1/2} \Big] = 0$$

(IV-16)'

Si l'on remplace l'hypothèse (IV-16) par la suivante :

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} \|p_h \, {}^t q_h \, u\|_V = 0 & \forall\, u \in V \\ \lim_{h \to 0} \|p_h \, {}^t q_h \, f\|_{V'} = 0 & \forall\, f \in V' \end{cases}$$

les solutions des problèmes approchés $(P_\zeta^\varepsilon)'$ convergent dans $\mathcal{W}$ pour $\zeta \to 0$ vers la solution u de (P_t).

En vue d'étudier le rôle joué par ε dans la condition de stabilité, nous allons revenir sur le Théorème IV-3 ; nous considèrerons le cas (cf. [17] [18]) où l'opérateur approché $A^\mu_{\varepsilon,\zeta}$ admet une décomposition de la forme :

$A^\mu_{\varepsilon,\zeta} = A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta} + A^{1,\mu}_{\varepsilon,\zeta}$ dans laquelle seul le terme $A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta}$ est supposé coercif

$$(A^{0,\mu}_{\varepsilon\zeta} \, u_h, u_h)_h \geq C_\varepsilon \|u_h\|_h^2 \qquad \forall\, u_h \in V_h$$

et nous montrerons que l'on peut remplacer alors la condition de stabilité (IV-16) par $k < \dfrac{2}{|A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta}|_h}$; autrement dit, la stabilité dépend de la partie principale de $A^\mu_{\varepsilon,\zeta}$ seulement.

THEOREME IV-5

Supposons que l'opérateur $A^\mu_{\varepsilon,\zeta}$ défini en (IV-21) admet une décomposition de la forme :

(IV-25)

$$A^\mu_{\varepsilon,\zeta} = A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta} + A^{1,\mu}_{\varepsilon,\zeta}$$

où les opérateurs $A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta}$ et $A^{1,\mu}_{\varepsilon,\zeta}$ vérifient les propriétés suivantes :

(IV-26)

$$\begin{cases} \text{i)} \ (A^{0,\mu}_{\varepsilon,\zeta} \, u_h, \, u_h)_h \geq C_\varepsilon \|u_h\|_h^2 \ \forall\, u_h \in V_h \\ \text{ii)} \ |A^{1,\mu}_{\varepsilon,\zeta} \, u_h|_h \leq N_\varepsilon \|u_h\|_h^2 \qquad \forall\, u_h \in V_h \end{cases}$$

avec C_ε, M_ε, N_ε constantes positives indépendantes de h, k.

Alors les solutions u_ζ^ε des problèmes (P_ζ^ε) (resp. $(P_\zeta^\varepsilon)'$) vérifient pour :

(IV-27)
$$\begin{cases} k \leq \dfrac{2\,(1-\eta)}{|A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu}|_h} & \eta \text{ positif arbitrairement petit} \\ k\,S(h)^2 \leq A < +\infty & A \text{ positif arbitrairement grand.} \end{cases}$$

une inégalité de l'énergie de la forme :

(IV-28)
$$\sup_{t\in[0,T]} |p_k u_\zeta^\varepsilon(t)|_h^2 + \int_0^T \|p_k u_\zeta^\varepsilon\|_h^2\,dt \leq K_\varepsilon \{|\mu_{0h}|_h^2 + \int_0^T \|p_k f_\zeta\|_{*h}^2\,dt\}$$

Si l'on remplace l'hypothèse (IV-26)i par la suivante :

(IV-29)
$$\text{Ré}\,(A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu} u_h, u_h)_h \geq C_\varepsilon \|u_h\|_h^2 \quad \forall\, u_h \in V_h$$

les solutions des problèmes (P_ζ^ε) (resp. $(P_\zeta^\varepsilon)'$) vérifient encore une inégalité de l'énergie analogue à (IV-28) à condition de remplacer la condition de stabilité (IV-27) par :

(IV-30)
$$\begin{cases} k < \dfrac{2(1-\eta)}{|A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu}(\text{Ré}A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu})^{-1/2}|_h} & \left(\text{avec Ré } A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu} = \dfrac{A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu} + (A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu})^*}{2}\right) \\ k\,S(h)^2 \leq A < +\infty \end{cases}$$

Nous allons maintenant en vue de préciser le rôle joué par ε dans la condition de stabilité faire certaines hypothèses sur $A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu}$; nous supposerons pour simplifier que $A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu}$ est autoadjoint.

COROLLAIRE IV-5 — On suppose que l'on remplace la condition (IV-26)i du Théorème précédent par la suivante ;

(IV-31)
$$\begin{cases} \text{i)} \quad A_{\varepsilon,\zeta}^{0,\mu} = A_\zeta^{0,\mu} + \varepsilon B_\zeta^{0,\mu} \\ \text{ii)} \quad (A_\zeta^{0,\mu} u_h, u_h)_h \geq C_h \|u_h\|_h^2 \qquad \forall\, u_h \in V_h \\ \text{iii)} \quad P_h \|u_h\|_h^2 \geq (B_\zeta^{0,\mu} u_h, u_h)_h \geq \sigma_h \|u_h\|_h^2 \qquad \forall\, u_h \in V_h \end{cases}$$

avec C_h, p_h, σ_h constantes positives indépendantes de k et μ vérifiant $\frac{C_h}{P_h} \geq \delta > 0$ pour tout h.

Alors quel que soit ϵ tel que $0 \geq \epsilon > -\delta$, les solutions approchées u_ζ^ϵ des problèmes (P_ζ^ϵ) (resp. $(P_\zeta^\epsilon)'$) vérifient pour :

(IV-32)
$$\begin{cases} k \leq \dfrac{2\,(1-\eta)}{|A_\zeta^{0,\mu}|_h - |\epsilon|\sigma_h} \\ k\,S(h)^2 \leq A < +\infty \end{cases}$$

une inégalité de l'énergie de la forme (IV-28).

Ce dernier résultat montre qu'il est possible, en choisissant ϵ dans un certain domaine de valeurs négatives, de diminuer la norme de l'opérateur $A_{\epsilon,\zeta}^{0,\mu}$ lorsque celui est de la forme (IV-31)i, et par suite d'arriver à un domaine de stabilité plus étendu que celui considéré habituellement et correspondant à $\epsilon = 0$.

D'autre part l'inégalité de l'énergie (IV-28) continuant d'après le Théorème IV-5 à être vérifiée, la convergence des solutions approchées qui en découle est encore assurée.

Nous allons maintenant donner des exemples de situations dans lesquelles ces résultats peuvent être utilisés.

IV - 4 APPLICATION : PROBLEMES D'EVOLUTION DANS DES ESPACES DE SOBOLEV.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et donnons nous une forme bilinéaire à coefficients constants continue sur $V = H_0^m(\Omega)$ et définie par :

V-33) $$a(u, v) = \sum_{|q|, |r| \leq m} a_{qr} \int_\Omega D^q u \, D^r v \, dx$$

Supposons de plus que celle-ci vérifie :

V-34) $$a(v, v) \geq C \|v\|^2 \qquad (C > 0) \qquad \forall\, v \in V.$$

Donnons nous ensuite des approximations de $H_0^m(\Omega)$ définies par :

V-35) $$\begin{cases} p_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in R_{0,h}(\Omega)} u_h^\alpha \theta_h^\alpha \qquad \theta_h^\alpha = \frac{1}{h} \theta(\frac{x}{h} - \alpha) \\ q_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in R_{0,h}(\Omega)} \overline{\nabla}^{(m)} u_h^\alpha \, g_h^\alpha \qquad\qquad g_h^\alpha = \frac{1}{h} g(\frac{x}{h} - \alpha) \end{cases}$$

où la suite $u_h = (u_h^\alpha)_\alpha$ est supposée nulle en dehors de l'ensemble d'indices :

$$R_{0,h}(\Omega) = \{\alpha \in Z^n \mid \text{Support } \theta_h^\alpha \subset \Omega\}$$

Nous supposons la fonction θ définie par (I-28) et la fonction g choisie sous la forme (III-17) avec Support g $\subset$ Support θ.

Nous avons vu (cf. Théorème III-3) qu'il est possible de mettre le terme $a(q_h u_h, p_h v_h)$ sous la forme remarquable :

V-36) $$a(q_h u_h, p_h v_h) = Q_h \sum_\alpha \overline{\nabla}^{(m)} u_h^\alpha \; \overline{\nabla}^{(m)} v_h^\alpha$$

où Q_h est un coefficient indépendant de u_h et v_h qui peut d'après (III-18) être supposé positif par modification du signe de g.

Alors si l'on pose :

$$a(p_h^{\epsilon} u_h, p_h v_h) = (A_h\, u_h,\ v_h)_h + \epsilon\, (B_h\, u_h,\ v_h)_h$$

avec :

(IV-37) $$(A_h\, u_h,\ v_h)_h = a\,(p_h u_h,\ p_h v_h)$$

(IV-38) $$(B_h u_h, v_h)_h = a(q_h u_h, p_h v_h)$$

on voit d'après la Proposition III - 1 que les opérateurs A_h et B_h vérifient les conditions (IV-31)ii et (IV-31)iii respectivement. Les hypothèses du Corollaire IV-5 se trouvent donc vérifiées avec :

$c_h = c$, $P_h = c_\Omega^2\ \bar{h}^{2m}\ Q_h$, $\sigma_h = k_\Omega^2\ h^{2(m)} Q_h$
où c_Ω et k_Ω désignent les constantes des formules (III-15) et (III-16), et le rapport $\dfrac{C_h}{P_h}$ reste borné inférieurement par $\delta > 0$, pour $h \to 0$ si l'on suppose que $\bar{h} \leq \lambda \underline{h}$ avec $\lambda > 0$, $\bar{h} = \max\limits_i h_i$, $\underline{h} = \min\limits_i h_i$.

Remarque : D'après le Théorème IV-5 ces résultats restent vrais si la forme $a(u, v)$ a seulement sa partie principale $a_0(u, v)$ coercive et à coefficients constants, c'est-à-dire si l'on a :

$$a(u, v) = a_0(u, v) + a_1(u, v)$$

$$a_0(u, v) = \sum_{|q|,\, |r|=m} a_{qr}^{(0)} \int_\Omega D^q u\, D^r v\, dx$$

$$a_1(u, v) = \sum_{|q|,\, |r|<m} \int_\Omega a_{qr}^{(1)}\ (x)\, D^q u\, D^r v\, dx$$

avec :

$$\sum_{|q|,\, |r|=m} a_{qr}^{(0)}\ \xi^{q+r} \geq c\, |\xi|^{2m} \ , \ a_{qr}^{(1)}(x) \in L^\infty(\Omega) \text{ pour } |q|,\ |r| < m$$

Il suffit alors de remplacer $a(u, v)$ par $a_0(u, v)$ dans (IV-36), (IV-37), (IV-38).

Il nous faut maintenant examiner si les fonctions $q_h u_h$ et $q_h r_h u$ satisfont aux conditions du Théorème IV-4 afin d'assurer la convergence des solutions approchées. Nous avons à ce sujet les résultats suivants qui précisent la Proposition III-1 et le Théorème III-2.

THEOREME IV-6.

i) On suppose que le pas $h = (h_1, \ldots h_n)$ vérifie la condition $\bar{h} < \sigma \underline{h}$ où $\bar{h} = \max_i h_i$, $\underline{h} = \min_i h_i$ et σ désigne une constante indépendante de h. Alors l'opérateur q_h de $l^2(Z^n)$ dans $H^m(R^n)$ défini par :

IV-39)
$$q_h u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha \in Z^n} \overline{\nabla}^{(m)} u_h^\alpha g_h^\alpha$$

où g est une fonction de $H^m(R^n)$ à support compact contenu dans celui de $\theta_{(m)}$ (cf. (I-28)) vérifie :

IV-40)
$$\|q_h u_h\|_V \leq \omega \|u_h\|_h \qquad \forall u_h \in V_h$$

où l'on a posé $V = H^m(R^n)$, $V_h = l^2(Z^n)$, $\|u_h\|_h = \|p_h u_h\|_{H^m(R^n)}$ avec $p_h u_h$ défini par (I-35), et où ω désigne une constante positive indépendante de h.

Cette propriété est encore vraie pour $V = H_0^m(\Omega)$ et $V_h = l^2(R_{0,h}(\Omega))$, espace des suites définies sur $R_{0,h}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné et où l'on a posé :

V-41)
$$R_{0,h}(\Omega) = \{ \alpha \in Z^n \mid \text{Support } \theta_h^\alpha \subset \Omega \}$$

ii) On suppose maintenant que les dérivées de la fonction g sont telles que $D^r g \in L^\infty(R^n)$ pour $|r| \leq m$ et que Ω est un ouvert borné satisfaisant à la propriété de régularité suivante :

> PROPRIETE (P) : Soit μ une fonction à support compact, on suppose qu'il existe des vecteurs $(a_{\alpha h})_{\alpha \in Z^n}$ et une constante C tels que :

1°) pour tout $\alpha \notin R_{0,h}(\Omega)$ et pour tout $x \in \Omega \cap \text{Support } \mu_h^\alpha$ on a :

$x - a_{\alpha h}\, k\, h \notin \Omega$ pour tout k tel que $0 \neq |k| \leq m$

2°) $\sup_h \sup_{\alpha \in Z^n} |\alpha_{\alpha h}| \leq C$

On définit $r^*_{0,h}$ opérateur de $H_0^m(\Omega)$ dans $l^2(R_{0,h}(\Omega))$ par

IV-42)
$$(r^*_{0,h} u)^\alpha = \begin{cases} (r_h^* u)^\alpha & \text{pour } \alpha \in R_{0,h}(\Omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où r_h^* désigne le transposé de p_h. Alors les opérateurs $q_h\, r^*_{0,h}$ convergent simplement vers zéro dans $\mathcal{L}(H_0^m(\Omega), H_0^m(\Omega))$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire :

IV-43)
$$\lim_{h \to 0} \| q_h\, r^*_{0,h}\, u \|_{H_0^m(\Omega)} = 0 \quad \forall\, u \in H_0^m(\Omega)$$

iii) On suppose toujours que l'ouvert Ω vérifie la propriété (P) et on munit V'_h dual de $V_h = l^2(R_{0,h}(\Omega))$ de la norme

$$\|f\|_{*h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f_h, v_h)_h|}{\|p_h\, u_h\|_V}$$

alors il existe une constante $\omega' > 0$ indépendante de h telle que :

V-44)
$$\|q_h\, f_h\|_{V'} \leq \omega' \|f_h\|_{*h} \qquad \forall\, f_h \in V'_h$$

iv) On suppose que l'ouvert Ω vérifie la propriété (P), et que la la fonction g vérifie $D^r g \in L^\infty(R^n)$ pour $|r| \leq m$, alors pour $h \to 0$ les opérateurs $q_h\, r^*_{0,h}$ convergent simplement vers zéro dans $\mathcal{L}(H^{-m}(\Omega), H^{-m}(\Omega))$ c'est-à-dire :

V-45)
$$\lim_{h \to 0} \| q_h r^*_{0,h} f \|_{V'} = 0 \qquad \forall\, f \in V' = H^{-m}(\Omega)$$

Remarque : En permutant les rôles de p_h et q_h on voit immédiatement que l'on a aussi :

$$\lim_{h\to 0} \|p_h \, {}^t q_{0,h} u\|_{H_0^m(\Omega)} = 0 \qquad \forall u \in H_0^m(\Omega)$$

$$\lim_{h\to 0} \|p_h \, {}^t q_{0,h} f\|_{H^{-m}(\Omega)} = 0 \qquad \forall f \in H^{-m}(\Omega)$$

IV - 5 ETUDE D'UN EXEMPLE ET RESULTATS NUMERIQUES.

Nous considérons maintenant le cas particulier du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \text{dans } \Omega \times]0,\ T[\quad \text{avec } \Omega =]0,\ 1[\times]0,1[\\ u(x,\ 0) = u_0(x) \\ u(x,\ t) = 0 \qquad \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{IV-46}$$

auquel est associée la forme bilinéaire :

$$a(u,\ v) = \int_\Omega (D_1 u\ D_1 v + D_2 u\ D_2 v)\ dx \qquad u,\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Désignant par $h = (h_1,\ h_2)$ (avec $h_1 = \dfrac{1}{N_1 + 1}$, $h_2 = \dfrac{1}{N_2 + 1}$, N_1, N_2 entiers positifs) le pas du réseau et par k le pas en temps, nous obtenons par utilisation des approximations (III-22), (III-24) le système discret explicite suivant (Schéma (P_ζ^ϵ)) :

$$\begin{cases} \dfrac{u_\zeta^{\mu+1} - u_\zeta^\mu}{k} = \dfrac{1}{h_1^2}\ \bar{\nabla}_1\ \nabla_1\ u_\zeta^\mu + \dfrac{1}{h_2^2}\ \bar{\nabla}_2\ \nabla_2\ u_\zeta^\mu - 3\epsilon\left(\dfrac{1}{h_1^2} + \dfrac{1}{h_2^2}\right)\bar{\nabla}\nabla u_\zeta^\mu \quad \mu = 1,\ 2,\ \ldots \dfrac{T}{k} - 1. \\ u_\zeta^0 = k^{1/2}\ u_{0h} \end{cases} \tag{IV-47}$$

où u_ζ^μ désigne le vecteur de composantes $(u_{h,k}^{\mu,\alpha})_\alpha \in \mathbb{R}_{0,h}(\Omega)$

et u_{0h} est défini par :

$$(u_{0h},\ v_h)_h = (u_0,\ p_h\ v_h) \qquad \forall\ v_h \in V_h$$

et où l'on a utilisé les notations :

$$\bar{\nabla}_i\ \nabla_i\ u_h^\alpha = u_h^{\alpha+\epsilon_i} - 2\ u_h^\alpha + u_h^{\alpha-\epsilon_i} \qquad i = 1,\ 2$$

$$\bar{\nabla}\nabla u_h^\alpha = 4\, u_h^\alpha - 2\,(u_h^{\alpha-\epsilon}1 + u_h^{\alpha+\epsilon}1 + u_h^{\alpha-\epsilon}2 + u_h^{\alpha+\epsilon}2) + u_h^{\alpha+\epsilon}1^{+\epsilon}2 + u_h^{\alpha+\epsilon}1^{-\epsilon}2 + u_h^{\alpha-\epsilon}1^{+\epsilon}2 + u_h^{\alpha-\epsilon}1^{-\epsilon}2$$

La matrice A_h^ϵ définie ici par :

$$(A_h^\epsilon u_h,\ v_h)_h = a(p_h u_h,\ p_h v_h) + \epsilon\, a(q_h u_h,\ p_h v_h)$$

admet pour valeurs propres :

(IV-48) $$\lambda^\epsilon_{q,h} = \frac{2}{h_1^2}(1-\cos \pi q_1 h_1) + \frac{2}{h_2^2}(1-\cos \pi q_2 h_2) + 12\,\epsilon\,(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2})(1-\cos\pi q_1 h_1)\times(1-\cos \pi q_2 h_2)$$

(où $q = (q_1, q_2)$; $q_1 = 1, \ldots N_1$; $q_2 = 1, \ldots N_2$)

correspondant aux vecteurs propres $u_{q,h}$ définis par :

$$u^\alpha_{q,h} = \sin \pi q_1 \alpha_1 h_1 \sin \pi q_2 \alpha_2 h_2 \quad \alpha_1 = 1, \ldots N_1 ; \alpha_2 = 1, \ldots N_2.$$

On vérifie que pour :

(IV-49) $$\epsilon > -\frac{1}{12}$$

les valeurs propres $\lambda^\epsilon_{q,h}$ sont toutes positives. D'autre part pour :

(IV-50) $$\epsilon \geq -\frac{1}{12}\ \min\left(\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2},\ \frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

la valeur propre maximum est atteinte pour $q_1 = N_1$, $q_2 = N_2$; on peut donc écrire dans le cas où (IV-50) est vérifiée :

$$|A_h^\epsilon|_h = \lambda^\epsilon_{(N_1,N_2),h} = \frac{2}{h_1^2}(1+\cos\pi h_1) + \frac{2}{h_2^2}(1+\cos\pi h_2) + 12\,\epsilon\,(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2})\,(1+\cos\pi h_1)\,(1+\cos\pi h_2)$$

Si l'on tient compte de ce que :

$$2 - \frac{\pi^2 h_i^2}{2} \leq 1 + \cos \pi h_i \leq 2 \qquad i = 1, 2$$

on a pour $|A_h^\varepsilon|_h$ la majoration suivante :

$$|A_h^\varepsilon|_h \leq 4 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) \left[1 + 12\varepsilon \left(1 - \frac{\pi^2 h_1^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\pi^2 h_2^2}{4}\right)\right]$$

et par suite d'après (IV-27) le critère de stabilité suivant :

$$k < k_0 \frac{1}{1 + 12\varepsilon \left(1 - \frac{\pi^2 h_1^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\pi^2 h_2^2}{4}\right)} \quad \text{où } k_0 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)}$$

correspondant au cas (IV-50).

Prenant pour simplifier $h_1 = h_2 = h$ et $\varepsilon = -\frac{1}{24}$ on trouve ainsi

(IV-51)
$$k < k_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{4}\right)^2} = 2 k_0 \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 h^2}{2} - \frac{\pi^4 h^4}{16}}$$

c'est-à-dire encore : $k < 2k_0 (1 - 0(h^2))$ alors que le critère classique (cf. [19]) est $k < k_0$.

Résultats numériques.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où la donnée initiale $u_0(x)$ est définie par :
$u_0(x) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$

Le problème (IV-46) admet alors la solution exacte :
$u(x, t) = e^{-2\pi^2 t} u_0(x)$

Nous utilisons le schéma approché (IV-47) dans lequel nous prenons : $h_1 = h_2 = h = 0,2$.

La limite de stabilité calculée d'après la formule classique

$$k_0 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)}$$ est ici égale à 0,01.

Les calculs ci-après ont été faits avec les pas en temps $k = 0,013$ et $k = 0,015$ et les valeurs de ε suivantes : $\varepsilon = 0$, $-0,08$ satisfaisant toutes deux à la condition (IV-49).

Pour $\varepsilon = 0$ on observe l'apparition de l'instabilité pour $t = 0,38$ dans le cas $k = 0,013$, et $t = 0,30$ dans le cas $k = 0,015$, ce qui conduit pour la solution approchée à des oscillations d'amplitudes croissantes alors que la solution exacte tend vers zéro pour $t \to \infty$. Au contraire, pour $\varepsilon = 0,08$ on n'observe aucune oscillation et la solution approchée ne diffère de la solution exacte que d'une quantité croissant lentement avec t, phénomène dû aux erreurs d'arrondi et à l'erreur de méthode.

$h = 0,2$ $k = 0,013$ $\varepsilon = 0$

Valeurs approchées calculées par (entre parenthèses valeurs exactes)

x_2	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,6$	$x_1 = 0,8$
	t = 0 (Données initiales)			
0,2	0,3455	0,5590	0,5590	0,3455
0,4	0,5590	0,9045	0,9045	0,5590
0,6	0,5590	0,9045	0,9045	0,5590
0,8	0,3455	0,5590	0,5590	0,3455
	t = 0,377			
	$0,8975\ 10^{-5}$ $(0,2025\ 10^{-3})$	$0,2699\ 10^{-3}$ $(0,3277\ 10^{-3})$	$0,1479\ 10^{-4}$ $(0,3278\ 10^{-3})$	$0,1666\ 10^{-3}$ $(0,2026\ 10^{-3})$
	$0,2699\ 10^{-3}$ $(0,3278\ 10^{-3})$	$0,2390\ 10^{-4}$ $(0,5303\ 10^{-3})$	$0,4362\ 10^{-3}$ $(0,5303\ 10^{-3})$	$0,1504\ 10^{-4}$ $(0,3278\ 10^{-3})$
	$0,1482\ 10^{-4}$ $(0,3278\ 10^{-3})$	$0,4362\ 10^{-3}$ $(0,5303\ 10^{-3})$	$0,2441\ 10^{-4}$ $(0,5303\ 10^{-3})$	$0,2693\ 10^{-3}$ $(0,327810^{-3})$
	$0,1666\ 10^{-4}$ $(0,2026\ 10^{-3})$	$0,1507\ 10^{-4}$ $(0,3278\ 10^{-3})$	$0,2693\ 10^{-3}$ $(0,3278\ 10^{-3})$	$0,9479\ 10^{-5}$ $(0,2026\ 10^{-3})$
	t = 0,507			
	$-0,1598\ 10^{-2}$ $(0,1556\ 10^{-4})$	$0,2610\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$-0,2585\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$0,1608\ 10^{-2}$ $(0,1556\ 10^{-4})$
	$0,2601\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$-0,4183\ 10^{-2}$ $(0,4075\ 10^{-4})$	$0,4209\ 10^{-2}$ $(0,4075\ 10^{-4})$	$-0,2585\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$
	$-0,2585\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$0,4209\ 10^{-2}$ $(0,4075\ 10^{-4})$	$-0,4182\ 10^{-2}$ $(0,4075\ 10^{-4})$	$0,2600\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$
	$0,1608\ 10^{-2}$ $(0,1556\ 10^{-4})$	$-0,2585\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$-0,2600\ 10^{-2}$ $(0,2518\ 10^{-4})$	$-0,1597\ 10^{-2}$ $(0,1556\ 10^{-4})$

$h = 0,2$ $k = 0,013$ $\varepsilon = 0$

$\underline{t = 1,027}$

$-0,2756\ 10^{3}$	$(0,5425\ 10^{-9})$	$0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$-0,4459\ 10^{-3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,2756\ 10^{3}$	$(0,5425\ 10^{-9})$
$0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$-0,7215\ 10^{3}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,7215\ 10^{3}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$-0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$
$-0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,7215\ 10^{3}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$-0,7215\ 10^{3}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$
$0,2756\ 10^{3}$	$(0,5425\ 10^{-9})$	$-0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,4459\ 10^{3}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$-0,2756\ 10^{3}$	$(0,5425\ 10^{-9})$

$\underline{t = 1,482}$

$0,1050\ 10^{8}$	$(0,6823\ 10^{-13})$	$-0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$-0,1050\ 10^{8}$	$(0,6823\ 10^{-13})$
$-0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,2750\ 10^{8}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$-0,2750\ 10^{8}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$
$0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$-0,2750\ 10^{8}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,2750\ 10^{8}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$-0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$
$-0,1050\ 10^{8}$	$(0,6823\ 10^{-13})$	$0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$-0,1699\ 10^{8}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,1050\ 10^{8}$	$(0,6823\ 10^{-13})$

$h = 0,2$ $k = 0,013$ $\varepsilon = -0,08$

(mêmes données initiales que pour $\varepsilon = 0$)

	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
$t = 0,377$								
0,2	$0,2088\ 10^{-3}$	$(0,2025\ 10^{-3})$	$0,3378\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$	$0,3378\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$	$0,2088\ 10^{-3}$	$(0,2026\ 10^{-3})$
0,4	$0,3378\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$	$0,5467\ 10^{-3}$	$(0,5303\ 10^{-3})$	$0,5467\ 10^{-3}$	$(0,5303\ 10^{-3})$	$0,3379\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$
0,6	$0,3378\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$	$0,5467\ 10^{-3}$	$(0,5303\ 10^{-3})$	$0,5467\ 10^{-3}$	$(0,5303\ 10^{-3})$	$0,3379\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$
0,8	$0,2088\ 10^{-3}$	$(0,2026\ 10^{-3})$	$0,3379\ 10^{-3}$	$(0,3277\ 10^{-3})$	$0,3379\ 10^{-3}$	$(0,3278\ 10^{-3})$	$0,2088\ 10^{-3}$	$(0,2026\ 10^{-3})$
$t = 0,507$								
	$0,1621\ 10^{-4}$	$(0,1556\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,1621\ 10^{-4}$	$(0,1556\ 10^{-4})$
	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,4245\ 10^{-4}$	$(0,4075\ 10^{-4})$	$0,4245\ 10^{-4}$	$(0,4075\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$
	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,4245\ 10^{-4}$	$(0,4075\ 10^{-4})$	$0,4245\ 10^{-4}$	$(0,4075\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$
	$0,1621\ 10^{-4}$	$(0,1556\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,2623\ 10^{-4}$	$(0,2518\ 10^{-4})$	$0,1621\ 10^{-4}$	$(0,1556\ 10^{-4})$
$t = 1,027$								
	$0,5893\ 10^{-9}$	$(0,5425\ 10^{-9})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,5893\ 10^{-9}$	$(0,5425\ 10^{-9})$
	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,1543\ 10^{-8}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,1543\ 10^{-8}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$
	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,1543\ 10^{-8}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,1543\ 10^{-8}$	$(0,1420\ 10^{-8})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$
	$0,5893\ 10^{-9}$	$(0,5425\ 10^{-9})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,9535\ 10^{-9}$	$(0,8778\ 10^{-9})$	$0,5893\ 10^{-9}$	$(0,5425\ 10^{-9})$
$t = 1,482$								
	$0,7686\ 10^{-13}$	$(0,6823\ 10^{-13})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,7687\ 10^{-13}$	$(0,6823\ 10^{-13})$
	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,2012\ 10^{-12}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,2012\ 10^{-12}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$
	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,2012\ 10^{-12}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,2012\ 10^{-12}$	$(0,1786\ 10^{-12})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$
	$0,7686\ 10^{-13}$	$(0,6823\ 10^{-13})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,1244\ 10^{-12}$	$(0,1104\ 10^{-12})$	$0,7686\ 10^{-13}$	$(0,6823\ 10^{-13})$

h = 0, 2 k = 0, 015 ε = 0

Valeurs approchées calculées par (entre parenthèses valeurs exactes)

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
	t = 0 (Données initiales)							
0, 2	0, 3455		0, 5590		0, 5590		0, 3455	
0, 4	0, 5590		0, 9045		0, 9045		0, 5590	
0, 6	0, 5590		0, 9045		0, 9045		0, 5590	
0, 8	0, 3455		0, 5590		0, 5590		0, 3455	
	t = 0, 360							
	$-0,2045\ 10^{-1}$	$(0,2833\ 10^{-3})$	$0,3348\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$-0,3320\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,2076\ 10^{-1}$	$(0,2833\ 10^{-3})$
	$0,3348\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$-0,5370\ 10^{-1}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,5435\ 10^{-1}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$-0,3301\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$
	$-0,3320\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,5435\ 10^{-1}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$-0,5390\ 10^{-1}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,3370\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$
	$0,2076\ 10^{-1}$	$(0,2833\ 10^{-3})$	$-0,3330\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,3370\ 10^{-1}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$-0,2065\ 10^{-1}$	$(0,2833\ 10^{-3})$
	t = 0, 510							
	$-0,4505\ 10^{1}$	$(0,1467\ 10^{-4})$	$0,7291\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$-0,7292\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,4507\ 10^{1}$	$(0,1467\ 10^{-4})$
	$0,7291\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$-0,1180\ 10^{2}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,1180\ 10^{2}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$-0,7294\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$
	$-0,7292\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,1180\ 10^{2}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$-0,1180\ 10^{2}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,7295\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$
	$0,4507\ 10^{1}$	$(0,1467\ 10^{-4})$	$-0,7294\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,7295\ 10^{1}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$-0,4509\ 10^{1}$	$(0,1467\ 10^{-4})$
	t = 1, 035							
	$0,6920\ 10^{9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$	$-0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$-0,6920\ 10^{9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$
	$-0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,1812\ 10^{10}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$-0,1812\ 10^{10}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$
	$0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$-0,1812\ 10^{10}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,1812\ 10^{10}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$-0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$
	$-0,6920\ 10^{9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$	$0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$-0,1120\ 10^{10}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,6920\ 10^{9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$

$h = 0,2$ $k = 0,015$ $\varepsilon = 0$

$t = 1,485$

$0,7191\ 10^{16}$	$(0,6431\ 10^{-13})$	$-0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$-0,7191\ 10^{16}$	$(0,6431\ 10^{-13})$
$-0,1163\ 10^{17}$	$(0;1040\ 10^{-12})$	$0,1883\ 10^{17}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$-0,1883\ 10^{17}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$
$0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$-0,1883\ 10^{17}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,1883\ 10^{17}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$-0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$
$-0,7191\ 10^{16}$	$(0,6431\ 10^{-13})$	$0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$-0,1163\ 10^{17}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,7191\ 10^{16}$	$(0,6431\ 10^{-13})$

$h = 0,2$ $k = 0,015$ $\varepsilon = -0,08$

(mêmes données initiales que pour $\varepsilon = 0$)

x_2	$x_1 = 0,2$		$x_1 = 0,4$		$x_1 = 0,6$		$x_1 = 0,8$	
	$t = 0,360$							
0,2	$0,2494\ 10^{-3}$	$(0,2833\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,2494\ 10^{-3}$	$(0,2833\ 10^{-3})$
0,4	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,6531\ 10^{-3}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,6531\ 10^{-3}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$
0,6	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,6531\ 10^{-3}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,6531\ 10^{-3}$	$(0,7418\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$
0,8	$0,2494\ 10^{-3}$	$(0,2833\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,4036\ 10^{-3}$	$(0,4584\ 10^{-3})$	$0,2494\ 10^{-3}$	$(0,2833\ 10^{-3})$
	$t = 0,510$							
	$0,1225\ 10^{-4}$	$(0,1467\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,1225\ 10^{-4}$	$(0,1467\ 10^{-4})$
	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,3206\ 10^{-4}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,3206\ 10^{-4}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$
	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,3206\ 10^{-4}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,3206\ 10^{-4}$	$(0,3840\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$
	$0,1225\ 10^{-4}$	$(0,1467\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,1982\ 10^{-4}$	$(0,2373\ 10^{-4})$	$0,1225\ 10^{-4}$	$(0,1467\ 10^{-4})$
	$t = 1,035$							
	$0,3212\ 10^{-9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,3212\ 10^{-9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$
	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,8409\ 10^{-9}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,8409\ 10^{-9}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$
	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,8409\ 10^{-9}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,8409\ 10^{-9}$	$(0,1213\ 10^{-8})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$
	$0,3212\ 10^{-9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,5197\ 10^{-9}$	$(0,7495\ 10^{-9})$	$0,3212\ 10^{-9}$	$(0,4632\ 10^{-9})$
	$t = 1,485$							
	$0,3801\ 10^{-13}$	$(0,6431\ 10^{-13})$	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,6151\ 10^{13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,3801\ 10^{-13}$	$(0,6431\ 10^{-13})$
	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,9453\ 10^{-13}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,9953\ 10^{-13}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$
	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,9953\ 10^{-13}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,9953\ 10^{-13}$	$(0,1684\ 10^{-12})$	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$
	$0,3801\ 10^{-13}$	$(0,6431\ 10^{-13})$	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,6151\ 10^{-13}$	$(0,1040\ 10^{-12})$	$0,3801\ 10^{-13}$	$(0,6431\ 10^{-13})$

B I B L I O G R A P H I E

[1] J. P. AUBIN : Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. (Bull. Soc. Math. France, Mémoire 12, 1967).

[2] J. P. AUBIN : Behavior of the approximate solution of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods. (Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1967, vol XXI, pp 559-639).

[3] J. P. AUBIN : Approximation of non homogeneous Neumann Problems : regularity of the convergence and estimates of errors in terms of n-width. (Math. Research Center, Madison, Summary report 930, 1968).

[4] J. P. AUBIN : Approximation of elliptic boundary value problems (Wiley, 1972)

[5] J. CEA : Approximation variationnelle des problèmes aux limites (Annales Institut Fourier 14 (1964) pp 345 - 444).

[6] P. G. CIARLET, P. A. RAVIART : General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with application to finite element methods. (Numerische Mathematik 17, 1971, pp 84-100)

[7] C. COATMELEC : Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables. (Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 83, 1966, pp 271-341).

[8] R. COURANT : Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. (Bull. Am. Math. Soc. 49, 1943, pp 1-23).

[9] Ju. K. DEMIANOVITCH : Approximation and convergence of the net method in elliptic problems. (Soviet Math. Doklady 7, 1966, pp 1129-1133).

[10] G. FIX, G. STRANG : Fourier Analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. (Studies in App. Math. 48, 1969, pp 265-273).

[11] G. FIX, G. STRANG : The finite element variational method. (livre à paraître chez Gordon & Breach).

[12]] K. O. FRIEDRICHS : A finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet Problems. (New York University, New York, 1962).

[13] K. O. FRIEDRICHS, H. B. KELLER : A finite difference scheme for generalised Neumann Problems. (In "Numerical solution of partial differential Equations" Academic Press, 1966, New York).

[14] J. L. LIONS, E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes T. I (Dunod, 1968).

[15] J. NITSCHE : Lineare Spline-funktionen und die Methoden von Ritz für elliptische Randwert Probleme.(Archive for Rational Mechanics and Analysis 36 , 1970, p 348-355).

[16] L. OGANESIAN : Convergence of difference schemes in case of improved approximation of the boundary. (Z. Vycisl. Mat. i. MAt. Fiz 6, 1966, pp 1029-1042).

[17] P. A. RAVIART : Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires. (Thèse - Paris 1965).

[18] P. A. RAVIART : Approximation des équations d'évolution par des méthodes variationnelles (In "Numerical Analysis of partial differential equations" CIME , 1967).

[19] R. D. RICHTMYER : Difference methods for initial value problems (Interscience, 1957).

[20] M. SCHULTZ : Multivariate Spline functions and elliptic problems (In "Approximation with special emphasis on Spline functions" Academic Press, New York, 1969).

[21] G. STRANG : The finite element method and Approximation theory. (In "Numerical solution of partial differential Equations", Academic Press, New York, 1971).

Vu

Marseille, le

Le Président de la These

Vu

Marseille, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer

Aix en Provence, le

Le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille